

Vecteurs (deuxième partie)

Table des matières

I	Multiplication d'un vecteur par un réel	1
II	Colinéarité de deux vecteurs	2
II.1	Définition	2
II.2	Caractérisation par les coordonnées	2
III	Parallélisme et alignement	3
III.1	Droites parallèles	3
III.2	Points alignés	3
IV	Aire d'un parallélogramme	3

I Multiplication d'un vecteur par un réel



Rappel

La norme (« longueur ») d'un vecteur \vec{u} se note $\|\vec{u}\|$.

Remarque : $\|\vec{AB}\| = AB$.



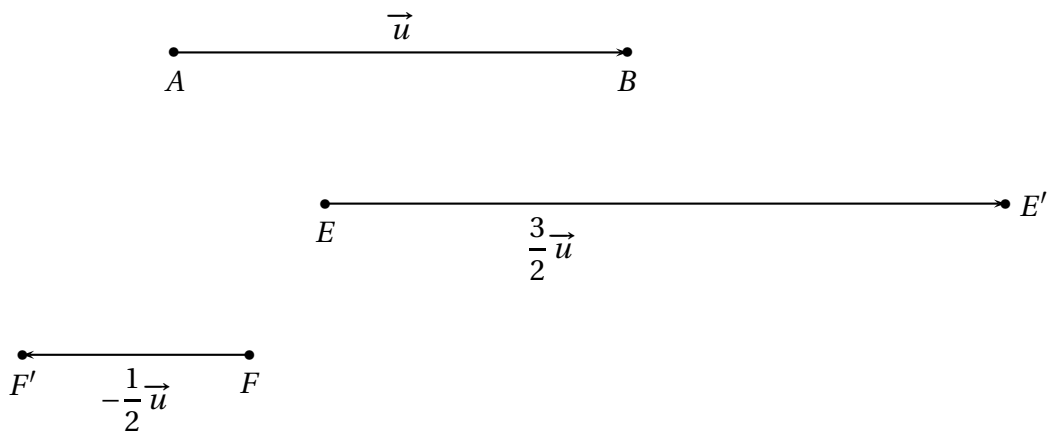
Propriété

Soit \vec{u} un vecteur non nul et soit k un réel non nul.

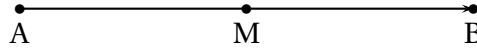
- Les vecteurs \vec{u} et $k\vec{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$, $k\vec{u}$ et \vec{u} ont le même sens. Si $k < 0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La norme de $k\vec{u}$ est $|k|$ fois celle de \vec{u} .
 $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Pour tout vecteur \vec{u} et pour tout réel k : $0\vec{u} = \vec{0}$ et $k\vec{0} = \vec{0}$.

Exemple :



Remarque : si M est le milieu d'un segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Propriétés

Pour tous réels k et k' , pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

II Colinéarité de deux vecteurs

II.1 Définition

Définition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque : deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

II.2 Caractérisation par les coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** de \vec{u} et \vec{v} , le nombre $\det(\vec{u}; \vec{v}) = x'y - x'y'$.

Remarque : les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 14 \\ 35 \end{pmatrix}$.

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 2 \times 35 - 5 \times 14 = 0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

Il est d'ailleurs évident que $\vec{v} = 7\vec{u}$ (coordonnées proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité égal à 7).

III Parallélisme et alignement

III.1 Droites parallèles



Propriété

Soient quatre points A, B, C et D distincts.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.

Justification : les deux droites sont parallèles signifie qu'elles ont la même direction, donc les deux vecteurs ont la même direction donc sont colinéaires.

Exemple : soient $A(2 ; 3), B(10 ; 5), C(4 ; 6)$ et $D(8 ; 7)$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\vec{AB} = 2\vec{CD}$ donc \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires : les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

III.2 Points alignés



Propriété

Trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires (ou \vec{AB} et \vec{BC}).

Exemple : soient $A(2 ; 3), B(10 ; 5)$ et $E(30 ; 10)$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (exemple précédent).}$$

$$\vec{AE} \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$\det(\vec{AB}; \vec{AE}) = 8 \times 7 - 2 \times 28 = 0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

Les trois points A, B et E sont donc alignés.

IV Aire d'un parallélogramme



Propriété

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $|\det(\vec{AB}; \vec{AD})|$.