Fonctions affines

Table des matières

I Définition :

Définition

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est affine s'il existe deux réels m et p tel que, pour tout x, $f(x) = mx + p$.
m s'appelle le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine.

Exemples :

- $f : x \longmapsto 2x+3$ est une fonction affine car $2x+3 = mx+p$ avec $\begin{cases} m=2 \\ p=3 \end{cases}$.
- $f : x \longmapsto \dfrac{3x+5}{7}$ est une fonction affine car $\dfrac{3x+5}{7} = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{5}{7} = mx+p$ avec $\begin{cases} m=\dfrac{3}{7} \\ p=\dfrac{5}{7} \end{cases}$.
- $f : x \longmapsto 5x$ est une fonction affine car $5x = mx+p$ avec $\begin{cases} m=5 \\ p=0 \end{cases}$

  On dit alors que f est **linéaire** (fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est égale à 0)
- $f : x \longmapsto 8$ est une fonction affine car $5x = mx+p$ avec $\begin{cases} m=5 \\ p=0 \end{cases}$.

  Cette fonction est une fonction **constante**.
- $f : x \longmapsto 3x^2+7$ n'est pas une fonction affine car il n'existe pas de nombres m et p constants tels que $mx+p = 3x^2+7$ pour tout x. (à cause de x^2)

Remarque : l'ensemble de définition d'une fonction affine est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}}$.
En effet, on peut calculer $mx + p$ pour tout x réel.

Remarque : : il y a deux façons d'écrire une fonction affine :

- $f : x \longmapsto -3x + 2$
- f est définie par : $f(x) = -3x + 2$

Calcul d'une image :
Exemple : Calculons l'image de 3 par la fonction affine $f : x \longmapsto 5x + 4$

$$\begin{aligned} f(3) &= 5 \times 3 + 4 \\ f(3) &= 15 + 4 \\ f(3) &= 19 \end{aligned}$$

Calcul d'un antécédent :
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 7x + 3$.
Cherchons l'antécédent de 5.
On cherche l'antécédent de 5 par la fonction f, c'est-à-dire le nombre x tel que $f(x) = 5$. Or, la fonction f est définie par :

$$f(x) = 7x + 3$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 7x + 3 &= 5 \\ 7x &= 2 \\ x &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

L'antécédent de 5 par f est $\dfrac{2}{7}$.

II Variations

Théorème

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = mx + p$.

- f est croissante si, et seulement si, $m > 0$.
- f est constante si, et seulement si, $m = 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $m < 0$.

Démonstration : Soient deux nombres quelconques x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
$f(x) = mx + p$ donc $f(x_1) = mx_1 + p$ et $f(x_2) = mx_2 + p$
$f(x_2) - f(x_1) = \left(ax_1 + p\right) - \left(m_2 + p\right) = mx_1 + p - mx_2 - p = mx_1 - mx_2 = \boxed{m(x_2 - x_1)}$.
Comme $x_2 - x_1$ est positif, puisque, par hypothèse, $x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de m.
Si $m > 0$, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) < f(x_2)$, donc f **respecte l'ordre** et f est **croissante**.

Si $m = 0$, f est constante, car, pour tout x, $f(x) = 0x + p = b$.

Si $m > 0$, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) > f(x_2)$, donc f **renverse l'ordre** et f est **décroissante**.

Remarque : Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine, avec $m \neq 0$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\dfrac{p}{m}$.
On en déduit les **tableaux de variations** possibles de f, selon le signe de m.

$\boxed{\text{Pour } m > 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

$\boxed{\text{Pour } m < 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

III Signe d'une fonction affine

D'après les tableaux de variation d'une fonction affine, on en déduit les tableaux de signes suivants :

Cas : $m > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$-$	0	$+$	

Cas : $m < 0$

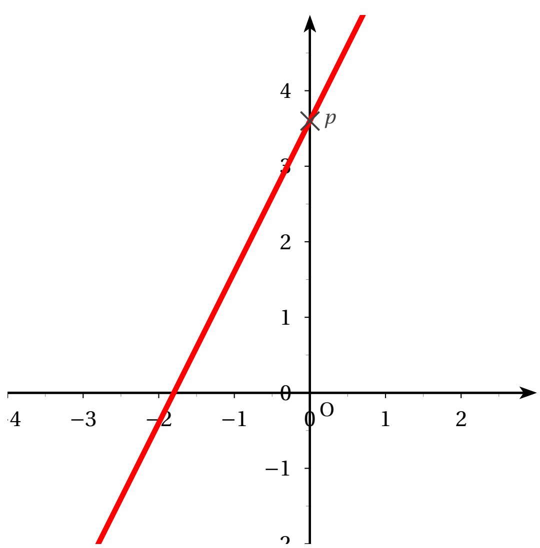
x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		$+$	0	$-$	

IV Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété (admise)

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, sécante à l'axe des ordonnées. m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$ (car $f(0) = p$)

Interprétation graphique de p :



Remarque : toute droite sécante à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

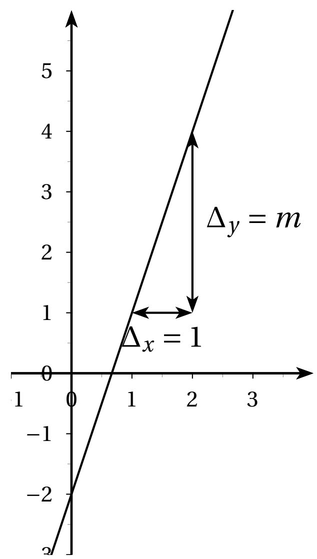
V Interprétation de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

a) $f(0) = p$ (ordonnée à l'origine) donc la droite représentative de f comme l'axe des abscisses au point de coordonnées $(0\ ;\ p)$.

b) **Interprétation graphique de m** :
Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine dont la représentation graphique est la droite $\mathscr{D}$.
Soient $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$.
Par définition de f, on a $f\left(x_A\right) = y_A$ et $f\left(x_B\right) = y_B$.
$f\left(x_B\right) = f\left(x_A\right) = \left(mx_A + p\right) - \left(mx_B + p\right) = mx_A + p - mx_B - p = m\left(x_B - x_A\right)$.
On en déduit : $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.
Symboliquement, on note $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δ signifie « différence », donc il faut comprendre Δx comme « différence des abscisses » et Δy comme différence des ordonnées.

Si l'on prend $\Delta_x = 1$, on a $\boxed{\Delta_y = m}$.
On en déduit que si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de la valeur de m parallèlement à l'axe des ordonnées.



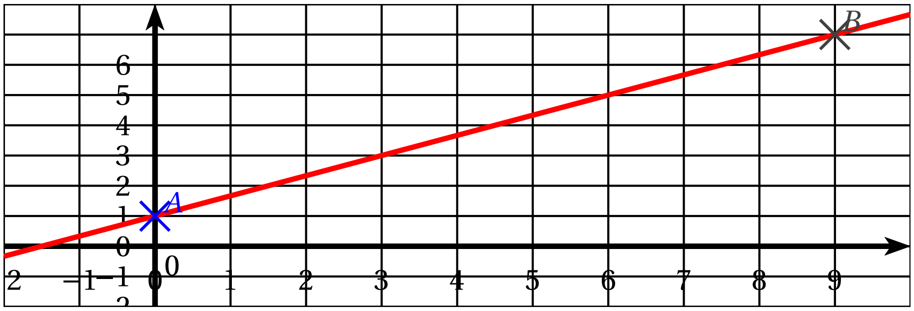
Remarque : si l'on se déplace de k unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace dans le même temps de km unités parallèlement à l'axe des ordonnées.
C'est lié au **théorème de Thalès**!

VI Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine?

VI.1 À partir de deux points :

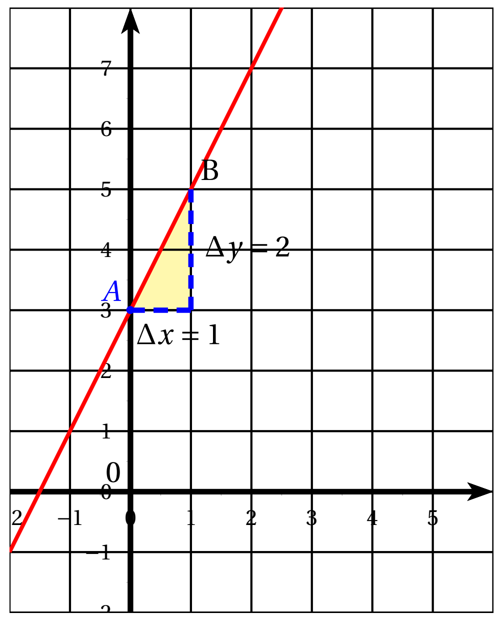
Exemple : on veut représenter graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto \dfrac{2}{3}x + 1$. On sait que la représentation graphique de f est une droite. Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci. On calcule alors les coordonnées de deux points de cette droite, en esssayant d'avoir des coordonnées entières, pour qu'elles soient faciles à placer. L'ordonnée à l'origine vaut 1, donc la droite passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$. On remarque qu'il suffit de prendre x multiple de 3 (x pas trop proche de 0, pour accroître la précision du tracé.) On remplit un tableau :

x	0	9
$y=\frac{2}{3}x+1$	1	$\frac{2}{3}\times 9+1=7$



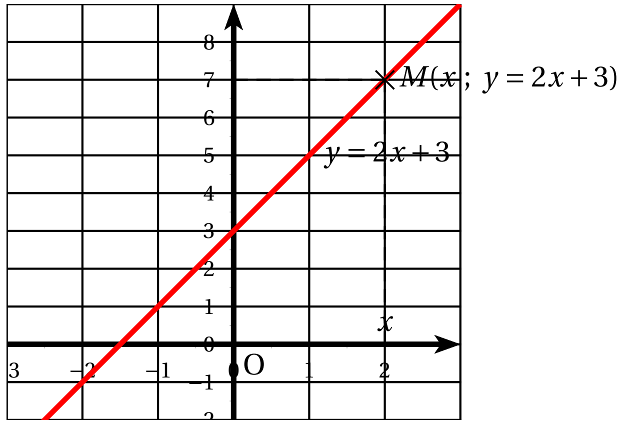
VI.2 En utilisant le coefficient directeur

Exemple : représenter graphiquement la fonction affine $x\longmapsto 2x+3$. L'ordonnée à l'origine est 3, donc la droite passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 3)$. Le coefficient directeur est 2, donc $2=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, c'est-à-dire $\Delta y=2\Delta x$. On choisit par exemple $\Delta x=1$; on obtient alors $\Delta y=2\times 1=2$. En partant de A, on se déplace de 1 en abscisses, et alors de 2 en ordonnées.



Remarque : La représentation graphique d'une fonction affine $f\longmapsto ax+b$ est une droite (sécante à l'axe de l'axe des ordonnées (Oy)) ; on dit que cette droite a pour **équation réduite** $\boxed{y=ax+b}$.

Exemple : La droite d'équation $y = 2x + 3$ est la représentation graphique de la fonction $f \mapsto 2x + 3$.



Exemple : Trouver l'équation de la droite passant par les points A(2 ; 5) et B(7 ; −1). C'est la même chose que de chercher la fonction affine f vérifiant $f(2) = 5$ et $f(7) = -1$. Notons m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine. $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-5}{7-2} = -\dfrac{6}{5}$. L'équation de la droite est alors $y = -\dfrac{6}{5}x + p$. A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient cette équation : $y_A = -\dfrac{6}{5}x_A + p$ donc $5 = -\dfrac{6}{5} \times 2 + p$.

D'où $-\dfrac{12}{5} + p = 5$ et $p = 5 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{25+12}{5} = \dfrac{37}{5}$.

L'équation de la droite (AB) est $\boxed{y = -\dfrac{6}{5}x + \dfrac{37}{5}}$.

VII Caractérisation d'une fonction affine

Théorème

f est une fonction affine si, et seulement si, l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.

Autrement dit, x_1 et x_2 étant deux réels distincts, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$ où m est un nombre constant.

Démonstration : Si f est une fonction affine, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$.

Réciproque : Soit f une fonction telle que, pour tous x_1 et x_2, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$. Alors, en particulier, pour x et 0, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = p$ d'où, en posant $f(0) = p$, $f(x) = mx + p$.

Application : on connaît les images de deux nombres par une fonction affine et l'on veut l'image d'un troisième nombre, sans trouver l'expression de la fonction affine :

x	2	4	7
$f(x)$	−1	5	

Puisque f est affine, on a : $\dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{f(7) - f(2)}{7-2}$ donc $\dfrac{5-(-1)}{4-2} = \dfrac{f(7)-(-1)}{7-2}$, soit $\dfrac{6}{2} = \dfrac{f(7)+1}{5}$.

Par conséquent : $3 = \dfrac{f(7)+1}{5}$ donc $f(7) + 1 = 3 \times 5 = 15$ d'où $f(7) = 15 - 1 = 14$: $\boxed{f(7) = 14}$.