Factorisation d'une expression algébrique

Table des matières

Définition

Factoriser une expression algébrique consiste à la transformer(lorsque c'est possible) pour qu'elle soit sous la forme d'un produit de facteurs le plus simples possibles.

Remarque : Toutes les expressions algébriques ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$.

Exemple : x^2+1 ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.

I Factorisations avec un facteur commun

On utilise les règles suivantes, basées sur la distributivité :

- $ab+ac=a(b+c)$
- $ab-ac=a(b-c)$

Exemples de factorisation avec un facteur commun

1) $2x+6=2x+2\times 3=\boxed{2(x+3)}$

2) $2xy+3xz=\boxed{x(2y+3z)}$

3) $x^2-3x=x\times x-3x=\boxed{x(x-3)}$

4) **Factoriser** $(2x+3)(5x+7)+(2x+3)(-2x+9)$.
On essaye de voir comment est constituée l'expression pour voir quelle règle l'on va utiliser.

$\underbrace{(2x+3)}_{a}\underbrace{(5x+7)}_{b}+\underbrace{(2x+3)}_{a}\underbrace{(-2x+9)}_{c}$

$=ab+ac$ en posant : $\begin{cases} a=2x+3 \\ b=5x+7 \\ c=-2x+9 \end{cases}$

$=a(b+c)$

$=(2x+3)\,[(5x+7)+(-2x+9)]$ (en remplaçant a, b et c par leurs expressions)

$=(2x+3)(5x+7-2x+9)$

$=(2x+3)(3x+16)$

donc : $\boxed{(2x+3)(5x+7)+(2x+3)(-2x+9)=(2x+3)(3x+16)}$

5) **Factoriser** $(3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5)$.

$\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(7x-4)}_{b}-\underbrace{(5x-3)}_{c}\underbrace{(3x+5)}_{a}$

$= ab - ca$ en posant : $\begin{cases} a = 3x+5 \\ b = 7x-4 \\ c = 5x-3 \end{cases}$

Remarque : $ab-ca = ab-ac = a(b-c)$. En remplaçant a, b et c par leurs expressions, on trouve :

$(3x+5)\left[(7x-4)-(5x-3)\right]$

$= (3x+5)(7x-4-5x+3)$ (attention au signe - devant la parenthèse)

$= (3x+5)(2x-1)$

donc : $\boxed{(3x+5)(7x-4)-(5x-3)(3x+5) = (3x+5)(2x-1)}$

6) **Factoriser** $(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x)$.

On remarque que : $(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x) = \underbrace{(7x+1)}_{a}\underbrace{(7x+1)}_{a}-\underbrace{(7x+1)}_{a}\underbrace{(3-2x)}_{b}$

$= aa - ab$ avec $\begin{cases} a = 7x+1 \\ b = 3-2x \end{cases}$

$= a(a-b)$

$= (7x+1)\left[(7x+1)-(2-3x)\right]$

$= (7x+1)(7x+1-2+3x)$

$= (7x+1)(10x-1)$

Par conséquent : $\boxed{(7x+1)^2-(7x+1)(3-2x) = (7x+1)(10x-1)}$.

7) **Factoriser** $(x+3)^2-(x+3)$.

Il est « évident » que $(x+3)$est un facteur commun.

$(x+3)^2-(x+3)$

$= \underbrace{(x+3)}_{a}\times\underbrace{(x+3)}_{a}-\underbrace{(x+3)}_{a}\times 1$

$= a\times a - a\times 1$ avec $a = (x+3)$

$= a(a-1)$

$= (x+3)\left[(x+3)-1\right]$

$= (x+3)(x+2)$.

D'où : $\boxed{(x+3)^2-(x+3) = (x+3)(x+2)}$.

II Avec un facteur commun moins apparent

8) **Factoriser** : $(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13)$.

Il n'y pas de facteur commun apparent, mais on remarque que $6x+10 = 2(3x+5)$.

Par conséquent : $(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13) = (3x+5)(2x+7)-2(3x+5)(x+13)$.

$\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(2x+7)}_{b}-2\underbrace{(3x+5)}_{a}\underbrace{(x+13)}_{c}$

$= ab - 2ac$ avec $\begin{cases} a = 3x+5 \\ b = 2x+7 \\ c = x+13 \end{cases}$

$= a(b-2c)$

$= (3x+5)\left[(2x+7)-2(x+13)\right]$

$= (3x+5)(2x+7-2x-26)$

$= (3x+5)(-19)$

$= -19(3x+5)$.

Par conséquent : $\boxed{(3x+5)(2x+7)-(6x+10)(x+13)=-19(3x+5)}$

9) **Factoriser** $(15x-3)(2x+7)-10x+2$.
On remarque que : $15x-3=5(3x-1)$ et $-10x+2=-(10x-2)=-2(5x-1)$.

Par conséquent :
$(15x-3)(2x+7)-10x+2=3\underbrace{(5x-1)}_{a}\underbrace{(2x+7)}_{b}-2\underbrace{(5x-1)}_{a}=3ab-2a$ avec $\begin{cases} a=5x-1 \\ b=2x+7 \end{cases}$
$=a(3b-2)$
$=(5x-1)(3(2x+7)-2)$
$=(5x-1)(6x+21-2)$
$=(5x-1)(6x+19)$.
D'où : $\boxed{(15x-3)(2x+7)-10x+2=(5x-1)(6x+19)}$

III Avec des identités remarquables

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

1. **Factoriser** : $9x^2+42x+49$.
   Il n'y aucun facteur commun donc on recherche si on peut faire apparaître une identité remarquable.

   $9x^2+42x+49=(3x)^2+2\times(3x)\times7+7^2=a^2+2ab+b^2$ avec $\begin{cases} a=3x \\ b=7 \end{cases}$
   $=(a+b)^2$
   $=(3a+7)^2$.
   Par conséquent : $\boxed{9x^2+42x+49=(3x+7)^2}$
2. **Factoriser** : $100x^2-121$.
   $100x^2-121=(10x)^2-11^2=a^2-b^2$ avec $a=10x$ et $b=11$
   $=(a+b)(a-b)$
   $=(10x+11)(10x-11)$.
   D'où : $\boxed{100x^2-121=(10x+11)(10x-11)}$
3. **Factoriser** $(2x+9)^2-(3x-13)^2$.
   On voit que l'expression est la différence de deux carrés, ce qui fait penser à une identité remarquable.

   $(2x+9)^2-(3x-13)^2$
   $=a^2-b^2$ avec $a=(2x+9)$ et $b=(3x-13)$
   $=(a+b)(a-b)$
   $=[(2x+9)+(3x-13)]\,[(2x+9)-(3x-13)]$
   $=(2x+9+3x-13)(2x+9-3x+13)$
   $=(5x-4)(-x+22)$

   Par conséquent : $\boxed{(2x+9)^2-(3x-13)^2=(5x-4)(-x+22)}$

IV Avec facteur commun et identités remarquables

1. **Factoriser** $A=(4x-4)-(5x-13)(x-1)+x^2-1$
   On remarque que : $4x-4=4(x-1)$ et $x^2-1=x^2-x^2=(x+1)(x-1)$ (identité remarquable).
   Par conséquent :
   $A=4\underbrace{(x-1)}_{a}-\underbrace{(5x-13)}_{b}\underbrace{(x-1)}_{a}+\underbrace{(x+1)}_{c}\underbrace{(x-1)}_{a}$
   $=4a-ba+ca$ avec $a=(x-1)$; $b=(5x-13)$ et $=(x+1)$
   $=a(4-b+c)$
   $=(x-1)[4-(5x-13)+(x+1)]$
   $=(x-1)(4-5x+13+x-1)$
   $=(x-1)(-4x+16)$
   $=(x-1)\times 4(-x+4)$
   $=4(x-1)(-x+4)$

   D'où : $\boxed{A=(4x-4)-(5x-13)(x-1)+x^2-1=4(x-1)(-x+4)}$.
2. **Factoriser** $B=x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)$
   On remarque que : $x^2-4x+4=x^2-2\times x\times 2+2^2=(x-2)^2$ (identité remarquable) et que $(2-x)=(-1)\times(x-2)=-(x-2)$.

   Par conséquent : $B=x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)$
   $=(x-2)^2+(1-5x)\times(-1)\times(2-x)+(x-2)$
   $=\underbrace{(x-2)}_{a}\underbrace{(x-2)}_{a}-\underbrace{(1-5x)}_{b}\underbrace{(x-2)}_{a}+\underbrace{(x-2)}_{a}$ avec $a=(x-2)$, $b=(1-5x)$
   $=aa-ba+a$
   $=a(a-b+1)$
   $=(x-2)[(x-2)-(1-5x)+1]$
   $=(x-2)(x-2-1+5x+1)\pm\pm=(x-2)(6x-2)$
   $=(x-2)\times 2(3x-1)$
   $=2(x-2)(3x-1)$.

   Par conséquent : $\boxed{B=x^2-4x+4+(1-5x)(2-x)+(x-2)=2(x-2)(3x-1)}$

V Quand on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable

3. **Factoriser** $3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)$.
   On ne voit ni facteur commun , ni identité remarquable.
   En développant, on trouve;
   $A=3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)$
   $=3x^2-5x+18+(15x^2-27x+10x-18)$
   $3x^2-5x+18+15x^2-27x+10x-18$
   $=18x^2-22x$
   $=9\times 2x\times x-11\times 2x$
   $=2x(9x-11)$.

   D'où : $\boxed{3x^2-5x+18+(3x+2)(5x-9)=2x(9x-11)}$

Remarque :
Vous verrez en Première une technique pour factoriser, lorsque cela est possible, toute expression du second degré, c'est-à-dire une expression du type ax^2+bx+c, a, b et c réels, $a\neq 0$.

Rappel : toutes les expressions algébriques ne sont pas factorisables !
C'est le cas de x^2+1 par exemple.

VI Pour s'entraîner sur Internet

VI.1 Consulter par exemple les vidéos suivantes sur Internet

Avec un facteur commun :

- cliquer ici
- cliquer ici
- cliquer ici

Avec une identité remarquable :
Cliquer ici

VI.2 Liste d'exercices

- cliquer ici
- cliquer ici