

Géométrie repérée dans le plan

Table des matières

I	Coordonnées du milieu d'un segment	1
II	Distance entre deux points	2

I Coordonnées du milieu d'un segment



Définition

Soient deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points.

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Cela revient à calculer la moyenne des abscisses et des ordonnées.

Exemples d'application : Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on considère les points $A(3 ; 7)$ et $B(5 ; 2)$.

Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ donc } M\left(\frac{3+5}{2} ; \frac{7+2}{2}\right) \text{ d'où } \boxed{M\left(4 ; \frac{9}{2}\right)}$$

Exemple 1

Dans le plan muni d'un repère $(O ; I ; J)$, on considère les points $A(-3 ; -1)$, $B(5 ; -2)$, $C(7 ; 3)$ et $D(-1 ; 4)$.

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Solution de l'exemple 1

Notons K et L les milieux des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

K et L sont les mêmes coordonnées donc $\vec{K} = L$.

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : **$ABCD$ est un parallélogramme**.

Exemple 2

On considère les points $A(2 ; 5)$, $B(-1 ; 7)$ et $C(11 ; 13)$.

On cherche les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution de l'exemple 2

On note x_D et y_D les coordonnées de D.

ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.

Soit M le milieu de [AC] ; on a :

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{13}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 9 \end{cases}.$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont :

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-1 + x_D}{2} \\ \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{7 + y_D}{2} \end{cases}$$

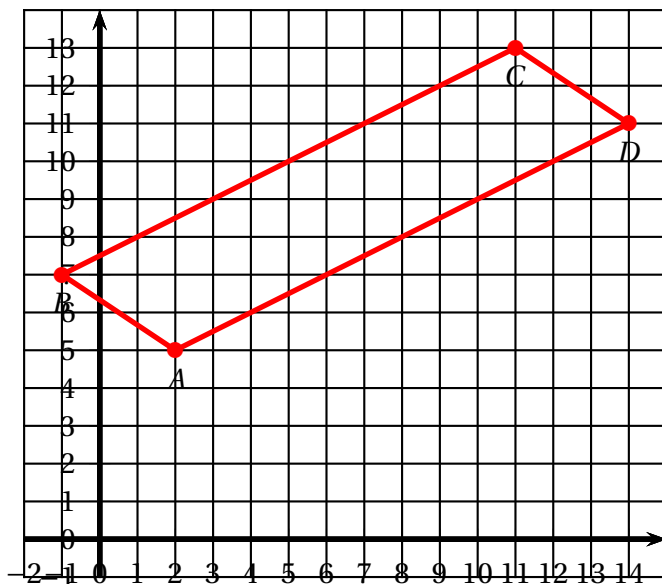
Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :

Donc $\frac{-1 + x_D}{2} = \frac{13}{2}$ d'où $-1 + x_D = 13$, donc $x_D = 14$.

$\frac{7 + y_D}{2} = 9$ donc $7 + y_D = 18$ d'où $y_D = 11$.

D a pour coordonnées **D(14 ; 11)**.

Vérification géométrique : on place les points pour vérifier que le quadrilatère ressemble à un parallélogramme.



II Distance entre deux points



Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).

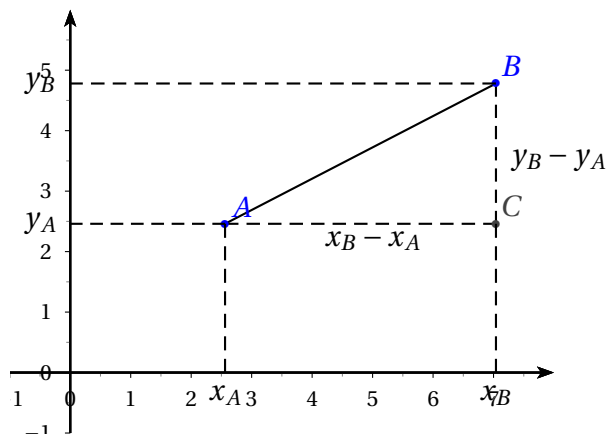
On considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Alors, la distance AB vaut : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Démonstration :

Supposons que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$.

Cette démonstration est basée sur le théorème de Pythagore.



Comme le repère est **orthonormé**, le triangle ABC est rectangle, puisqu'il a deux côtés parallèles aux axes. D'après le **théorème de Pythagore**, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Par conséquent : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B, car $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ et $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$.

Remarque : cette formule est à apprendre par cœur et à appliquer directement.

Exemple : Soient $A(3 ; 7)$ et $B(2 ; 13)$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (13 - 7)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37} \text{ donc } AB = \sqrt{37}$$

Exercice 1 :

Montrer que le point $A(1 ; \sqrt{2})$ appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}.$$

La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

Exercice 2 :

Soient $A(1 ; -2)$ et $B(4 ; 2)$.

Montrer que B appartient au cercle de centre $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 5.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice 3 :

Soient $A(-2 ; -1)$, $B(1 ; 3)$ et $C(-3 ; 6)$.

Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

- $AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- $BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
- $AC = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (6 - (-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$
- $AB = BC$ donc ABC est isocèle.
- $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$; $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$.
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.

Il est donc **isocèle rectangle en B**.