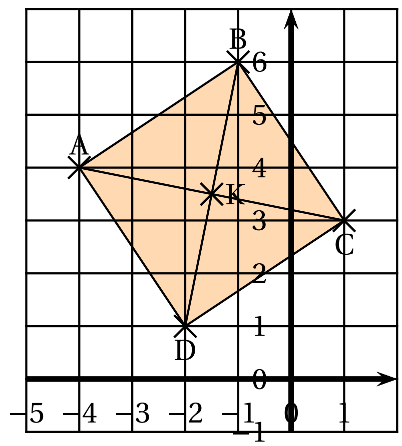
Correction de la feuille d'exercices (milieux et longueurs de segments)

Exercice I

Dans le repère orthonormé (O; I; J), les points A, B et C ont pour coordonnées $A(-4\ ;\ 4)$, $B(-1\ ;\ 6)$ et $C(1\ ;\ 3)$.

1) Figure :



2) Soit K le milieu de $[AC]$:
   - $x_C = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-4+1}{2} = -\dfrac{3}{2}$
   - $y_C = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4+3}{2} = \dfrac{7}{2}$

   Les coordonnées de K sont : $\boxed{K\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2}\right)}$

3) Calcul de AB :
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (6-4)^2} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$; $\boxed{AB = \sqrt{13}}$

4) Soit D le symétrique de B par rapport à K.
   Par propriété de la symétrie centrale, K est le milieu de $[BD]$.
   Par conséquent :

   - $x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ donc $x_B + x_D = 2x_K$ d'où $x_D = 2x_K - x_B = 2 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) - (-1) = -3 + 1 = -2$
   - $y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2}$ donc $y_B + y_D = 2y_K$ d'où $y_D = 2y_K - y_B = 2 \times \left(\dfrac{7}{2}\right) - 6 = 7 - 6 = 12$

   Les coordonnées de D sont : $\boxed{D(-2\ ;\ 1)}$

5) K est e milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ su quadrilatère $ABCD$ donc c'est un parallélogramme.

6) Calculons BC :
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-6)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $\boxed{BC = \sqrt{13}}$.
   Le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur : c"est un **losange**.

7) Pour savoir si c'est un carré, regardons s'il a un angle droit.
   Considérons le triangle ABC.
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} == \sqrt{(1-(-4))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$; $\boxed{AC = \sqrt{26}}$.
   Nous avons :

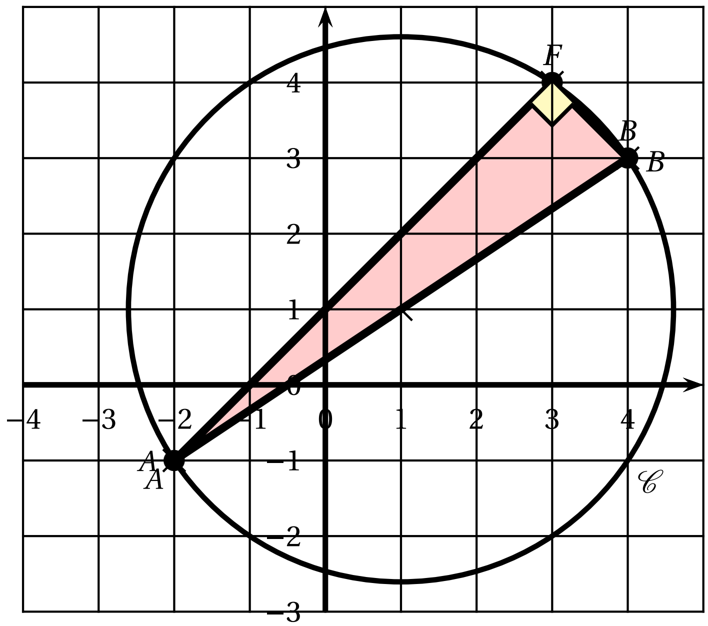
- $AC^2 = \sqrt{26}^2 = 26$
- $AB^2 + BC^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 = 13 + 13 = 26$
- Par conséquent : $AC^2 = AB^2 + BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC et rectangle en B.

$ABCD$ est un mosange qui a un angle droit : c'est un **carré**

Exercice II

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.
On considère les points $A(-2\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ 3)$ et $F(3\ ;\ 4)$.

Figure (non demandée)



1) $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB].

   a) Soit M le centre de ce cercle. M est le milieu du diamètre $[AM]$ donc :
   $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ $M\left(\dfrac{-2+4}{2}\ ;\ \dfrac{-1+3}{2}\right)$: $\boxed{M(1\ ;\ 1)}$

   b) Le rayon de ce cercle $\mathscr{C}$ est : $r = MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + \left(y_M y_A\right)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 2^2}$
   $= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$; $\boxed{r = \sqrt{13}}$

2) Pour montrer que F appartient à $\mathscr{C}$, on calcule la longueur MF :
   $MF = \sqrt{(x_F - x_M)^2 + \left(y_M - y_F\right)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $\boxed{MF = \sqrt{13} = r}$.
   La longueur MF est égale au rayon de cercle $\mathscr{C}$: F appartient à $\mathscr{C}$

3) F appartient au cercle de diamètre $[AB]$ donc le triangle ABM est un **triangle rectangle** en F.