

Correction des exercices sur les coordonnées

A Coordonnées du milieu

A.1

On considère un repère du plan. Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du milieu M de $[AC]$.

1. $A(1; -5)$ et $C(3; -9)$:

$$\begin{aligned} \bullet x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \bullet y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-5+(-9)}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont : $M(2; -7)$

2. $A(-2; 1)$ et $C(2; 0)$

$$\begin{aligned} \bullet x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \bullet y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont : $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$

3. $A(-3; \sqrt{2})$ et $C(2; -\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} \bullet x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+2}{2} = \frac{1}{2} \\ \bullet y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{\sqrt{2}+(-\sqrt{2})}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont : $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

4. $A(1; -3)$ et $C(-1; 3)$

$$\begin{aligned} \bullet x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \bullet y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont : $M(0; 0)$

A.2

Dans un repère $(O; I; J)$, on considère les points $A(2; 5)$, $C(3; -7)$ et $C(-2; 3)$.

- 1) Déterminer les coordonnées du milieu M de $[AC]$.

$$\begin{aligned} \bullet x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \bullet y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont $M(0; 4)$.

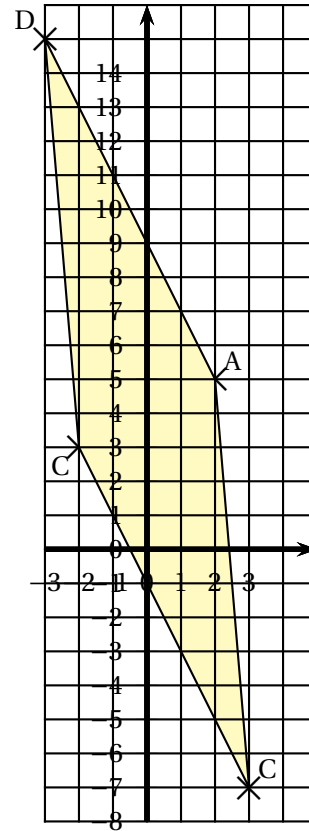
- 2) $ACCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, les deux diagonales ont le même milieu. M doit être le milieu de la diagonale $[CD]$.

On doit avoir :

$$\begin{aligned} \bullet x_M &= \frac{x_C + x_D}{2} \text{ donc } 2x_M = x_C + x_D \text{ d'où : } x_D = 2x_M - x_C \\ &= 2 \times 0 - 3 = -3 \\ \bullet y_M &= \frac{y_C + y_D}{2} \text{ donc } 2y_M = y_C + y_D \text{ d'où : } y_D = 2y_M - y_C \\ &= 2 \times 4 - (-7) = 15 \end{aligned}$$

Les coordonnées de D sont : $D(-3; 15)$

Vérifions en traçant le quadrilatère :



B Calcul de distances

B.1

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3; 7)$, $C(-3; 1)$ et $C(1; -3)$.

Démontrer que le triangle ACC est un triangle rectangle.

$$\begin{aligned} \bullet AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-3-3)^2 + (1-7)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} \\ &= \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}; \quad AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet CC &= \sqrt{(x_C - x_C)^2 + (y_C - y_C)^2} = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-3-1)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 2} \\ &= 4\sqrt{2}; \quad CC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-7)^2}$
 $= \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = \sqrt{4 \times 26}$
 $= \sqrt{2^2 \times 26} = 2\sqrt{26}$; $AC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

On a :

- $AC^2 = \sqrt{104}^2 = 104$
- $AC^2 + CC^2 = \sqrt{72}^2 + \sqrt{32}^2 = 72 + 32 = 104$
- On constate que $AC^2 = AC^2 + CC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACC est rectangle en C.

B. 2

Le repère est orthonormé. Déterminer dans chacun des cas les distances AC, AC et CC. Le triangle ACC est-il rectangle?

1. A(3; 0), B(-1; 0), C(-1; 3)

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
 $= \sqrt{(-1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
 $= \sqrt{(-1-(-1))^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0+3^2} = \sqrt{9} = 3$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
 $= \sqrt{(-1-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9}$
 $= \sqrt{25} = 5$
- $AC^2 = \sqrt{25}^2 = 5$; $AC^2 + CC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

On pouvait trouver sans calcul, car A et B ayant une ordonnée nulle, le segment [AB] appartient à l'axe des abscisses et B et C ayant la même abscisse, [BC] est parallèle à l'axe des ordonnées; comme les deux axes sont perpendiculaires, les côtés [AC] et [CC] sont aussi perpendiculaires, donc le triangle est rectangle en C.

2. A(-2; 3), C(3; 2), C(0; 0)

- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2}$
 $= \sqrt{26}$
- $CC = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
- $AC = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- $AC^2 = 26$; $CC^2 + AC^2 = 13 + 13 = 26$ donc $AC^2 = CC^2 + AC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACC est rectangle en C.

3. A(0; 5), C(3; 6), C(5; -2)

- $AC = \sqrt{(3-0)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
- $CC = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$
- $AC = \sqrt{(5-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$
- $AC^2 = 74$; $AC^2 + CC^2 = 10 + 68 = 78$.
 $AC^2 \neq AC^2 + CC^2$.

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ACC n'est pas rectangle.

C Problèmes généraux

C. 1

Dans un repère du plan, on considère les points E(3; 4), F(6; 6) et K(4; -1)

Calculons les coordonnées des points G et H tels que EFGH soit un parallélogramme de centre K.

G et H doivent être respectivement les symétriques de E et F par rapport à K.

• K est le milieu de [EG] donc :

$$x_K = \frac{x_E + x_G}{2} \text{ donc } 2x_K = x_E + x_G \text{ d'où } x_G = 2x_K - x_E$$

$$= 2 \times 4 - 3 = 5$$

$$\text{De même, avec une formule analogue : } y_G = 2y_K - y_E$$

$$= 2 \times (-1) - 4 = -6.$$

Donc : $G(5; -6)$

• De même, K est le milieu de [FH].

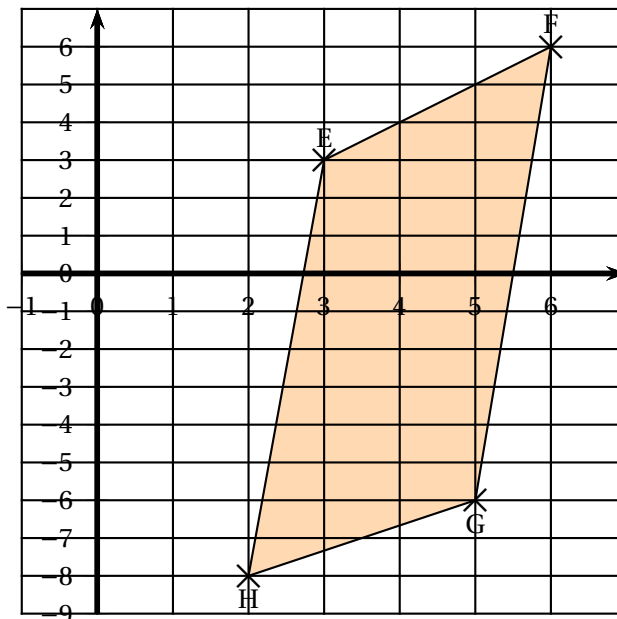
$$\text{On obtient : } 2x_K = x_F + x_H \text{ d'où } x_H = 2x_K - x_F$$

$$= 2 \times 4 - 6 = 2$$

$$\text{De même, avec une formule analogue : } y_H = 2y_K - y_F$$

$$= 2 \times (-1) - 6 = -8.$$

Donc : $H(2; -8)$



C.2

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(-2; -3) et C(4; 1).

- Notons K le centre du cercle; K est le milieu du diamètre $[AC]$.

$$K\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \text{ donc } \boxed{K(1; -1)}.$$

- Le rayon du cercle est :

$$\begin{aligned} r &= \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - (-3))^2}}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 16}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{\sqrt{2^2 \times 13}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

- Soit $M(3; 2)$.

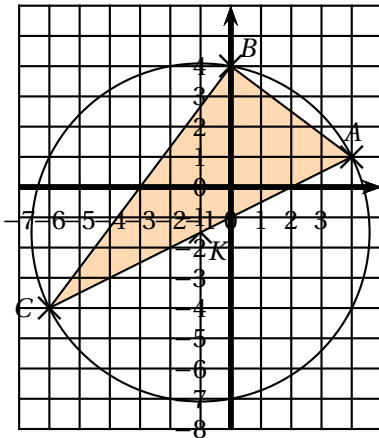
$$\begin{aligned} KM &= \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = r \\ KM &= r \text{ donc } M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AC]. \end{aligned}$$

$$\text{Soit } N\left(-2; \frac{5}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} KN &= \sqrt{(x_N - x_K)^2 + (y_N - y_K)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + \left(\frac{5}{2} - (-1)\right)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}} \neq \sqrt{13} \\ KN &\neq r \text{ donc } N \text{ n'appartient pas au cercle de diamètre } [AC]. \end{aligned}$$

C.3

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(4; 1), C(0; 4) et C(-6; -4)



$$\begin{aligned} 1. \bullet AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet CC &= \sqrt{(x_C - x_C)^2 + (y_C - y_C)^2} = \sqrt{(-6 - 0)^2 + (-4 - 4)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \\ \bullet AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6 - 4)^2 + (-4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5 \end{aligned}$$

$$2. AC^2 = 125; AB^2 + BC^2 = 25 + 100 = 125 \text{ donc } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

- Puisque le triangle ABC est rectangle en B, le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le milieu K de l'hypoténuse $[AC]$.

$$K\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \text{ donc } \boxed{K\left(-1; -\frac{3}{2}\right)}$$

$$\text{Le rayon du cercle est } r = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2};$$

$$\boxed{r = \frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

C.4

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(-5; -3), C(8; 3), M(1; 1) et $N\left(-3; \frac{39}{4}\right)$. Un point appartient à la médiatrice de $[AC]$ si, et seulement si, il est équidistant de $[AC]$.

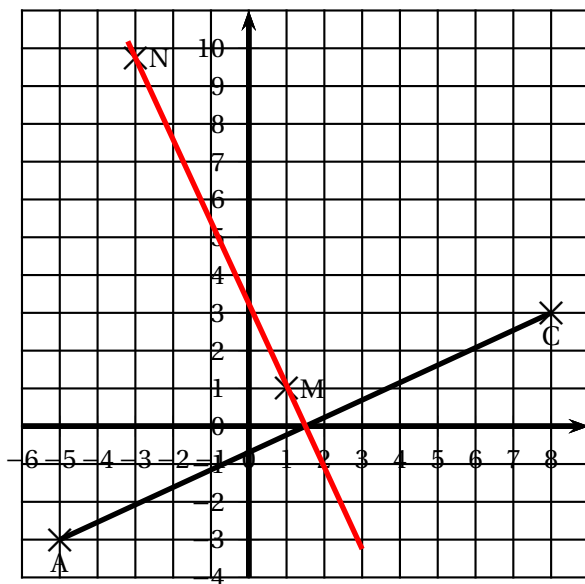
$$\begin{aligned} \bullet AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-5))^2 + (1 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet CM &= \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 8)^2 + (1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}. \end{aligned}$$

$AM \neq CM$ donc M n'appartient pas à la médiatrice de $[AC]$ (même s'il est très proche!)

$$\begin{aligned} \bullet AN &= \sqrt{(x_N - x_A)^2 + (y_N - y_A)^2} = \sqrt{\left(-3 - (-5)\right)^2 + \left(\frac{39}{4} - (-3)\right)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{51}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2665}{16}} = \frac{\sqrt{2665}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet CN &= \sqrt{(x_N - x_C)^2 + (y_N - y_C)^2} = \sqrt{(-3 - 8)^2 + \left(\frac{39}{4} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{(-11)^2 + \left(\frac{27}{4}\right)^2} = \sqrt{121 + \frac{27^2}{16}} = \sqrt{\frac{2665}{16}} = \frac{\sqrt{2665}}{4}. \\ AN &= CN \text{ donc } N \text{ appartient à la médiatrice de } [AC]. \end{aligned}$$



C.5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I; J), on considère les points A(-3; 0), B(2; 1), C(4; 3) et D(-1; 2).

- Figure à la fin
- Les coordonnées du milieu de [AC] sont $\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
Celles du milieu de [BD] sont $\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
On trouve les mêmes coordonnées.
Les deux diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu : $K\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

$$3. \bullet OC = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\bullet OD = \sqrt{(x_D - x_O)^2 + (y_D - y_O)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\bullet DC = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

Le triangle OCD n'est ni rectangle (contraposée du théorème de Pythagore) ni isocèle!

- On considère le point E du plan tel que CODE soit un parallélogramme. Les deux diagonales [CD] et [OE] doivent avoir le même milieu.

Donc :

$$\bullet \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{x_O + x_E}{2} \text{ soit } \frac{4 + (-1)}{2} = \frac{0 + x_E}{2} \text{ d'où } x_E = 3.$$

$$\bullet \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{y_O + y_E}{2} \text{ soit } \frac{3 + 2}{2} = \frac{0 + y_E}{2} \text{ d'où } y_E = 5.$$

$$5. AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-3))^2 + 5^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

