2^{nde} : correction du TD n° 8 sur les fonctions affines

Exercice I

Les fonctions suivantes sont-elles affines ?
Si oui, donner le coefficient directeur est l'ordonnée à l'origine.

1) $f_1 \quad : x \mapsto 3x+5$

$3x+5 = mx+p$ avec $\begin{cases} m=3 \\ p=5 \end{cases}$ donc f_1 est affine.

2) $f_2 \quad : x \mapsto -2x-7,5$

$-2x-7,5 = mx+p$ avec $\begin{cases} m=-2 \\ p=-7,5 \end{cases}$ donc f_2 est affine.

3) $f_3 \quad : x \mapsto \dfrac{3}{x+1}$

$\dfrac{3}{x+1}$ ne peut pas se mettre sous la forme $mx+p$ donc f_3 n'est pas affine.
D'autre part, f n'est pas définie en -1 alors que les fonctions affine sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f_3 ne peut pas être affine.

4) $f_4 \quad : x \mapsto \dfrac{2}{5}x - \dfrac{4}{7}$

$\dfrac{2}{5}x - \dfrac{4}{7} = mx+p$ avec $\begin{cases} m=\dfrac{2}{5} \\ p=-\dfrac{4}{7} \end{cases}$ donc f_4 est affine.

5) $f_5 \quad : x \mapsto 3x^2-5$

$3x^2-5$ne peut pas se mettre sous la forme $mx+p$ à cause de x^2. f_5 n'est pas affine.

6) $f_6 \quad : x \mapsto 3\sqrt{x}$

$3\sqrt{x}$ ne peut pas se mettre sous la forme $mx+p$ à cause de $\sqrt{x}$.
D'autre part, on ne peut calculer $f(x)$ que pour $x \geqslant 0$ donc f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et non sur $\mathbb{R}$.
f_6 n'est pas affine.

7) $f_7 \quad : x \mapsto \dfrac{7x-3}{5}$.

$\dfrac{7x-3}{5} = \dfrac{7}{5}x - \dfrac{3}{5} = mx+p$ avec $\begin{cases} m=\dfrac{7}{5} \\ p=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$ donc f_7 est affine.

8) $f_8 \quad : x \mapsto \sqrt{2}x$

$\sqrt{2}x = \sqrt{2} \times x = mx+p$ avec $\begin{cases} m=\sqrt{2} \\ p=0 \end{cases}$ donc f_8 est affine

9) $f_9 \quad : x \mapsto 2(x-\sqrt{7})-2x$.

$2(x-\sqrt{7})-2x = \cancel{2x} - 2\sqrt{7} - \cancel{2x} = \boxed{-2\sqrt{7}}$.
$-2\sqrt{7} = mx+p$ avec $m=0$
$p-2\sqrt{7}$ donc f_9 est affine (c'est une fonction constante).

Exercice II

Soit $f : x \mapsto 3x - 4$ une fonction affine.

1) • $f(3) = 3 \times 3 - 4 = 9 - 4 = 5$; $\boxed{f(3) = 5}$
   • $f(7) = 3 \times 7 - 5 = 21 - 5 = 16$; $\boxed{f(7) = 16}$
2) x est un antécédent de -1 si, et seulement si, $f(x) = -1$ donc $3x - 4 = -1$.
   On en déduit $3x = 3$ d'où $x = 1$.
   L'antécédent de -1 est 1.

Exercice III

On sait que f est linéaire donc il existe a tel que $f(x) = ax$.

$f(3) = 4$ équivaut à $a \times 3 = 4$ donc $3a = 4$ d'où $a = \frac{4}{3}$.

f est définie par $\boxed{f(x) = \frac{4}{3}x}$

Exercice IV

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes :

1) $f_1 : x \mapsto 3x + 7$
   Le coefficient directeur est $m = 3 > 0$ donc f est croissante.
2) $f_2 : : x \mapsto -7x + 1$
   Le coefficient directeur est $m = -7 < 0$ donc f est décroissante.
3) $f_3 : x \mapsto \frac{5x - 3}{7} = \frac{5}{7}x + \left(-\frac{3}{7}\right)$.
   Le coefficient directeur est $m = \frac{5}{7} > 0$ donc f est croissante.
4) $f_4 : x \mapsto -\frac{1}{5}x + 2$
   Le coefficient directeur est $m = -\frac{1}{5} < 0$ donc f est décroissante.
5) $f_5 : x \mapsto \frac{-1 + 5x}{7}$
   Le coefficient directeur est $m = -\frac{1}{7} < 0$ donc f est décroissante.
6) $f_6 : x \mapsto (\pi - 5)x + 6$.
   Le coefficient directeur est $m = \pi - 5 < 0$ donc f est décroissante.
7) $f_7 : x \mapsto \frac{3x + 2}{5} - \frac{x}{2}$.
   $\frac{3x + 2}{5} - \frac{x}{2} = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}x = \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right] x + \frac{2}{5}$
   $= \frac{6 - 5}{6}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{6}x + \frac{2}{5}$.
   Le coefficient directeur est $m = \frac{1}{6} > 0$ donc f est décroissante.

Exercice V

Soit $r : x \mapsto 3x - 7$ une fonction affine.

1) f est croissante car le coefficient directeur est $m = 3 > 0$.
2) $f(x) = 0$ équivaut à $3x - 7 = 0$ donc $3x = 7$ d'où $x = \frac{7}{3}$.
3) Compléter alors le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↗	

Exercice VI

1. La fonction affine f vérifie $f(2) = 5$ et $f(6) = 3$.
   $2 < 6$ mais $f(2) > f(3)$ donc f ne respecte pas l'ordre, donc renverse l'ordre : f est **décroissante**.
2. La fonction affine g vérifie $g(-1) = 3$ et $g(2) = 6$.
   $-1 < 2$ et $g(-1)g(2)$; g respecte l'ordre.
   g est **croissante**.