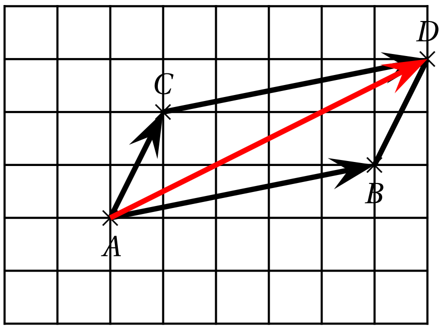
2nde : correction du TD n° 9 (vecteurs et coordonnées)

Exercice I

Soient les points A, B et C (voir figure ci-dessous).

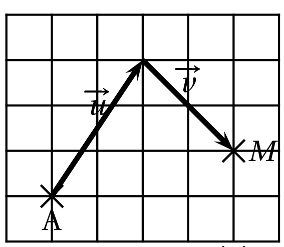


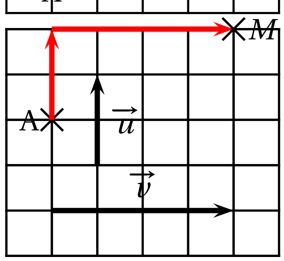
On veut représenter le vecteur somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

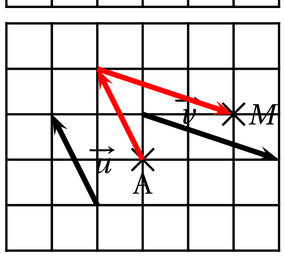
1. L'écriture $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ne peut pas se simplifier avec la relation de Chasles car l'extrémité du premier vecteur n'est pas égale à l'origine su second vecteur, même en permutant les deux vecteurs.
2. Construisons le point D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (voir figure).
3. Aors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boxed{\overrightarrow{AD}}$.
4. On remarque alors que $[AD]$ représente la diagonale du parallélogramme $ABDC$.

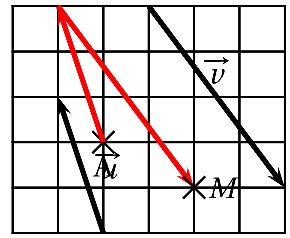
Exercice II

Sur chacune des quatre figures suivantes, placer M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$:









Exercice III

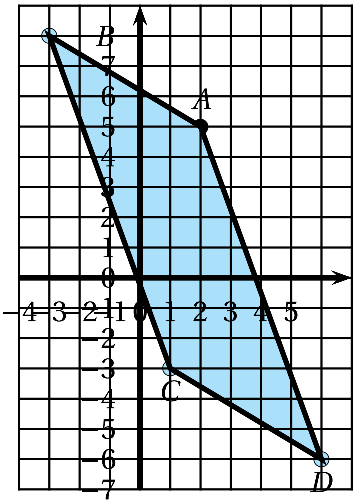
Soiznt A(- 2; 1), B(2; 3), C(3; -1) et D(7; 1).

1.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\3-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7-3\\1-(-1))\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ car ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.
   On en déduit que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice IV

Soient $A(2\,;\,5)$, $B(-3\,;\,8)$ et $C(1\,;\,-3)$.

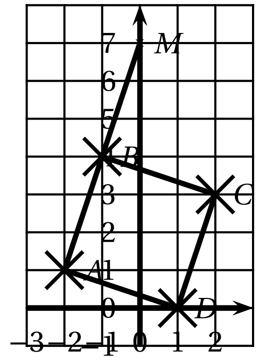
1. $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. (⚠ attention à l'ordre des points)
2. $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}}$
3. $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\-3-y_D\end{pmatrix}}$
4. Ces deux vecteurs doivent être égaux donc ils doivent avoir les mêmes coordonnées.
   Donc : $\begin{cases}1-x_D=-5\\-3-y_D=3\end{cases}$ d'où : $\begin{cases}1+5=x_D\\-3-3=y_D\end{cases}$.
   D a pour coordonnées : $\boxed{D(6\,;\,-6)}$
   Figure (non demandée) :



Exercice V

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-2;1), C(2;3), D(1;0) et M(0;7).

1. $x_B = \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1$ et
   $y_B = \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$.
   $\boxed{B(-1\ ;\ 4)}$.
2. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-1\\3-0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (mêmes coordonnées) donc $ABCD$ un parallélogramme.
3. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{1^2+3^2} = \boxed{\sqrt{10}}$.
   - $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-(-1)=3\\3-4=-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ d'où
     $BC = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$.
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-(-2)=4\\3-1=2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ d'où
     $AC = \sqrt{4^2+2^2 = \boxed{\sqrt{20}}}$
   - $AB = BC = \sqrt{10}$ donc ABC est isocèle en B.
     $AC^2 = 20$ et $AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20$ donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
     D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en B.
     Le triangle ABC est donc isocèle rectangle en B.
     $ABCD$ est un parallélogramme; il a deux côtés consécutifs de même longueur, donc c'est un **losange**. De plus, il a un angle droit en B, donc c'est un **carré**.



Exercice VI

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-2; 1) ,B(-l; -2), C(5; 0) et D(4; 3).

1. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)=-1+2=1\\-2-1=-3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-4=1\\0-3=-3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (même coordonnées) donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.
2. Pour montrer que c'est un rectangle, on peut montrer qu'il a un angle droit, ou que ses diagonales ont la même longueur.
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ donc $AC = \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{49+1}$
     $= \boxed{\sqrt{50}}$.
   - $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}4-(-1)=5\\3-(2)=5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ d'où
     $BD = \sqrt{5^2+5^2} = \boxed{\sqrt{50}}$.
   - $AC = BD$: $ABCD$ un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur : c'est un **rectangle**.