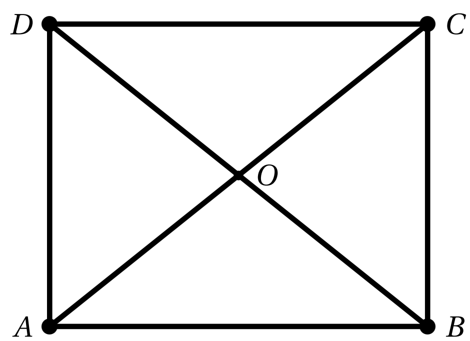
2$^{\text{nde}}$: correction du TD n° 6

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\ I\,;\ J)$.

Exercice I

$ABCD$ est un rectangle de centre O.

1) Figure :



2) parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies ?

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; faux, car ces deux vecteurs n'ont pas le même sens.

b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; vrai

c) $AB = CD$; vrai (dans un rectangle, les côtés opposeront la même longueur)

d) $AC = BD$: vrai

e) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$: faux ! Les deux vecteurs n'ont pas la même direction.

f) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$: vrai, car O est le milieu de la diagonale $[BD]$.

g) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$: faux (sens différents)

h) $OA = OB$: vrai car O est le milieu des deux diagonale et qu'elles ont la même longueur.

Exercice II

Soient les points $A(5\,;\ 9)$, $B(0\,;\ 1)$ et $C(8,0)$.

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (1-9)^2}$
$= \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-1)^2}$
$= \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$
- $AB = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(8-5)^2 + (0-9)^2}$
$= \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

Les trois côtés ont des longueurs différentes : le triangle n'est pas isocèle.

Exercice III

Soient les points $A\left(-\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{6}\,;\ \dfrac{7}{6}\right)$ et $C\left(\dfrac{5}{6}\,;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

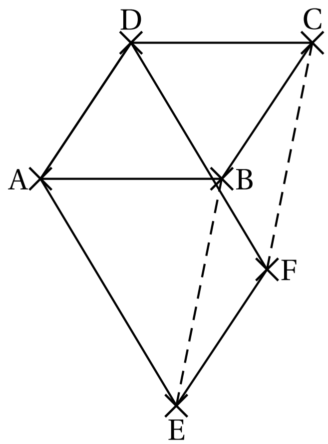
1)
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{1}{6} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{4}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$
$= \boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{6}\right)^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{4}{6}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9}}$
$= \boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{5}{6} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{\left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{\left(\dfrac{8}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}$
$= \boxed{\dfrac{4}{3}}$

2)
- $AC^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$
- $AB^2 + BC^2 = \left(\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9} + \dfrac{8}{9} = \dfrac{16}{9}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC, rectangle en B.

Exercice IV

$ABCD$ et $AEFD$ sont deux parallélogrammes.

1) Par exemple :

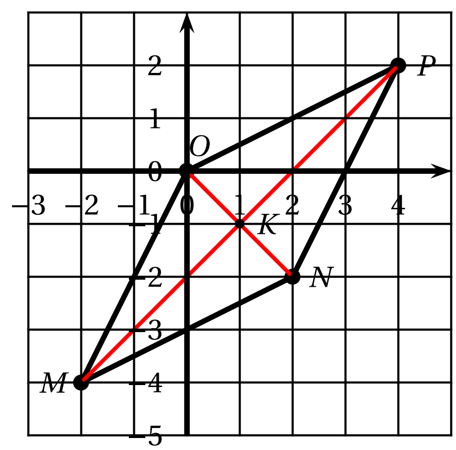


2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ puisque $ABCD$ est un parallélogramme et $AEFC$ aussi.
3) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ donc $BCFE$ est un parallélogramme.

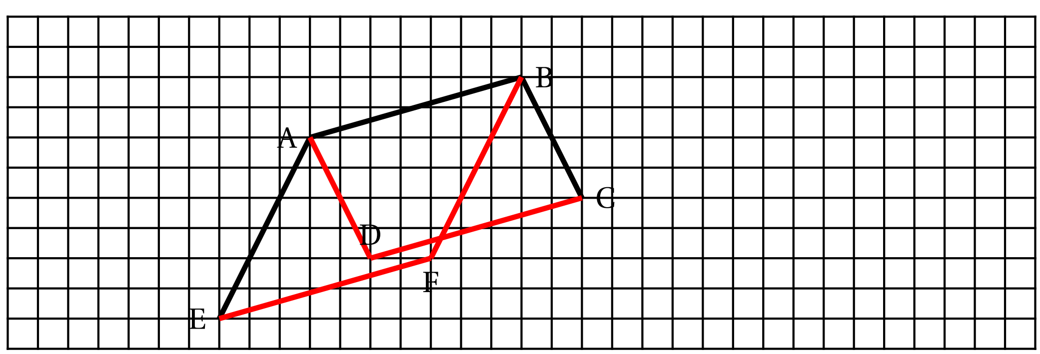
Exercice V Brevet Amérique du Nord 2001

Soient les points M$(-2\ ;\ -4)$ et N$(2\ ;\ -2)$.

1. Figure en fon d'exercice :
   - $OM = \sqrt{(-2-0)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{4+16}$
     $= \sqrt{20} = \sqrt{2^2 5} = 2\sqrt{5}$
   - $MN = \sqrt{(2-(-2))^2+(-2-(-4))^2}$
     $= \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$
   - $OM = MN$ donc OMN est isocèle en M.
2. Construire le point P, image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{MO}$.
3. Par construction, on a : $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{NP}$ donc $OMNP$ est un **parallélogramme**.
4. Le point d'intersection de [ON] et de [MP] est le milieu des deux diagonales, donc en particulier celui de $[0N]$.
   Alors : $K\left(\dfrac{x_O+x_N}{2}\ ;\ \dfrac{Y_O+y_N}{2}\right)$ donc $\boxed{K(1\ ;1)}$



Exercice VI



1) Tracer les parallélogrammes $ABCD$ et $AEFB$.
2) L'image du point B par la translation qui transforme C en D est A.
3) Ll'image du point B par la translation qui transforme A en E est F.
4) L'image du segment $[AE]$ par la translation qui transforme A en B est $[BF]$
5) L'image du point D par la translation qui transforme E en F est C car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{EF} = DC$.