2nde : correction du TD nº 19 (équations)

Exercice I

Une équation dont l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ est par exemple :

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0$$

Exercice II

Résoudre les équations suivantes :

1) $9x^2 = 64 \iff 9x^2 - 64 = 0 \iff (3x) - 8^2 = 0 \iff (3x+8)(3x-8) = 0.$
Un produit de facteur est nul aussi, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- $3x+8=0 \iff 3x=-8 \iff x=-\dfrac{8}{3}$
- $3x-8=0 \iff 3x=8 \iff x=\dfrac{8}{3}$

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{8}{3} ; \dfrac{8}{3}\right\}}$

2) $x^2+x+1=1 \iff x^2+x=0 \iff x(x+1)=0.$
Avec le théorème du produit nul, on trouve : $\boxed{\mathscr{S} = \{-1 ; 0\}}$

3) $(x+1)^2 = (3x+3)(2x-3)$
$\iff (x+1)^2 - (3x+3)(2x-3) = 0$
$\iff (x+1)^2 - 3(x+1)(2x-3) = 0$
$\iff (2x+1)\,[(x+1) - 3(2x-3)] = 0$
$\iff (2x+1)(x+1-6x+9) = 0$
$\iff (x+1)(-5x+10) = 0$
$\iff (x+1) \times (-5)(x-2) = 0$
$\iff \boxed{(x+1)(x-2) = 0}$

On en déduit : $\boxed{\mathscr{S} = \{-1 ; 2\}}$

4) $(x+4)^2 = 16(2x-5)^2$
$\iff (x+4)^2 - 16(2x-5)^2 = 0$
$\iff (x+4)^2 - [4(2x-5)]^2 = 0$
$\iff [(x+4)+4(2x-5)]\,[(x+4)-4(2x-5)] = 0$
$\iff (x+4+8x-20)(x+4-8x+20) = 0$
$\iff (9x-16)(-7x+24) = 0$

On applique le théorème du produit nul :

- $9x-16=0 \iff 9x=16 \iff x=\dfrac{16}{9}$
- $-7x+24=0 \iff -7x=-24 \iff x=\dfrac{24}{7}$

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{16}{9} ; \dfrac{24}{7}\right\}}$.

Exercice III

En augmentant de 7 cm la longueur de chaque côté d'un carré, l'aire du nouveau carré augmente de 81 cm^2.
Soit x la longueur du carré initial.
Son aire vaut x^2.
Le côté du nouveau carré vaut $x+7$ et son aire vaut $(x+7)^2$.
Par conséquent, on a : $\boxed{(x+7)^2 = x^2+81}$.

Résolution :
$(x+7)^2 = x^2+81 \iff x^2+14x+49 = x^2+81 \iff 14x+49 = 81 \iff 14x = 81-49 = 12 \iff x = \frac{32}{14} = \boxed{\frac{16}{7}}$.
Le carré initial a un côté égale à $\frac{16}{7}$.

Exercice IV

Déterminer deux entier naturels consécutifs dont la différence des carrés vaut 303.
Sot n le plus petit des deux entiers.
L'autre vaut $n+1$.
Alors : $(n+1)^2 - n^2 = 303$.
En développant, on trouve :
$n^2+2n+1-n^2 = 303 \iff 2n+1 = 303$
$\iff 2n = 302 \iff \boxed{n = 151}$.
Les entiers sont 151 et 152

Exercice V

On rappelle que la vitesse moyenne d'un objet est donnée par la formule $v = \frac{d}{t}$ où v est la vitesse et t le temps mis pour parcourir la distance d (attention à la concordance des unités).

1) Un automobiliste parcourt 36 km en 18 min.
   1 min=$\frac{1}{60}$h donc 18 min=$\frac{18}{60}$ h=$\frac{3}{10}$ h.
   $v = \frac{d}{t} = \frac{36}{\frac{3}{10}} = 36 \times \frac{10}{3} = 120$ km/h
2) a) $v = \frac{d}{t}$ donc $t = \frac{d}{v}$.
   b) $v = 30$; $d = 18$.
   $t = \frac{18}{30} = 0,6$ h.
   Le cycliste a mis 0,6h, soit $0,6 \times 60$ min=36 min.
3) a) $v = \frac{d}{t} \iff \boxed{d = vt}$
   b) 42 min= $42 \times \frac{1}{60} = \frac{7}{10}$ h
   Alors : $d = 110 \times \frac{7}{10} = \boxed{77}$.
   La moto a parcouru 77 km

Exercice VI

1) $\mathscr{A} = \pi r^2$ donc $r^2 = \frac{\mathscr{A}}{\pi}$ d'où, comme r est positif :
   $\boxed{r = \sqrt{\frac{\mathscr{A}}{\pi}}}$
2) Si $\mathscr{A} = 30$, $\boxed{r = \sqrt{\frac{30}{\pi}}}$