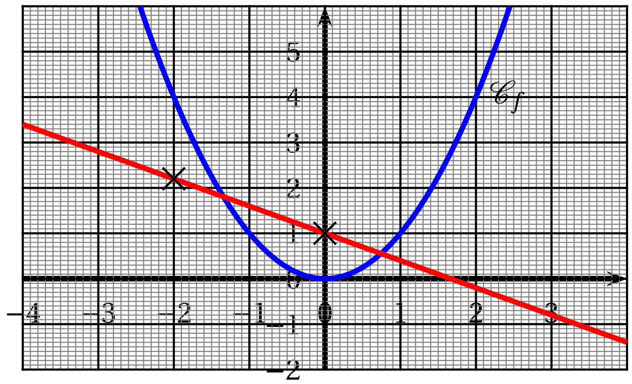
2nde : correction du TD nº 17 (fonctions carré et inverse)

Exercice I

Ci-dessous est représentée la fontion carré $f : x \mapsto x^2$.



1) Tracer sur le mème graphique la droite $\mathscr{D}_g$ représentative de la fonction affine $g : x \mapsto -\dfrac{3}{5}x + 1$.
   Pour tracer cette droite, on calcule les coordonnées de deux points :

x	0	-2
$g(x) = -\dfrac{3}{5}x + 1$	1	$\dfrac{11}{5} = 1,2$

   La droite représentative de g passe par les points de coordonnées (0; 1) et (-2; 1,32)

2) l'équation $x^2 + \dfrac{3}{5}x - 1$ équivaut à $f(x) = g(x)$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{D}_g$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{-1,4\ ;\ 0,7\}}$ (valeurs approchées)

Exercice II

Rappel : une fonction f est impaire si, pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = -f(x)$.

1) Soit $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   Pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x} = -x + \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -x - \dfrac{1}{x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ donc $f(-x) = -f(x)$: f est impaire.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc symétrique par rapport à l'origine.

2) Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

   (a) • $g(-1) = (-1)^2 + /\dfrac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$
       • $g(1) = 1^2 + \dfrac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

   (b) • $g(-1) \neq g(1)$ donc g n'est pas paire.
       • $g(-1)śneq - g(1)$ donc g n'est pas impaire

   g n'est ni paire ni impaire.

Exercice III

On va étudier les variations de la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Étudions les variations sur $]0\,;\,+\infty[$.
On prend deux nombres **quelconques** a et b, avec $0 < a < b$.
Il faut comparer leurs images $f(a)$ et $f(b)$.

1. $f(a) = \dfrac{1}{a}$ et $f(b) = \dfrac{1}{b}$.
2. $f(b) - f(a) = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} = \boxed{\dfrac{a-b}{ab}}$
3. - Le dénominateur ab est positif comme produit de deux nombres positifs.
   - $a - b < 0$ car on a supposé $a < b$.
4. $f(b) - f(a)$ est le quotient d'un nombre négatif par un nombre positif : ce nombre est donc négatif
   $f(b) - f(a) < 0$.
5. Compléter alors : $\boxed{f(a) > f(b)}$.
6. f renverse l'ordre sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On en déduit que f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$

Remarque : on montre de même que l'a fonction inverse est décroissante sur $]-)\infty\,;\,0[$.

Exercice IV

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

1) - 2,14 et 2,15 sont positifs.
   - Sur $]0\,;\,+\infty[$, f est décroissante donc renverse l'ordre.
   - 2,14<2,15

   Alors : $f(2,14) > f[2,15]$ donc $\boxed{\dfrac{1}{2,14} > \dfrac{1}{2,15}}$

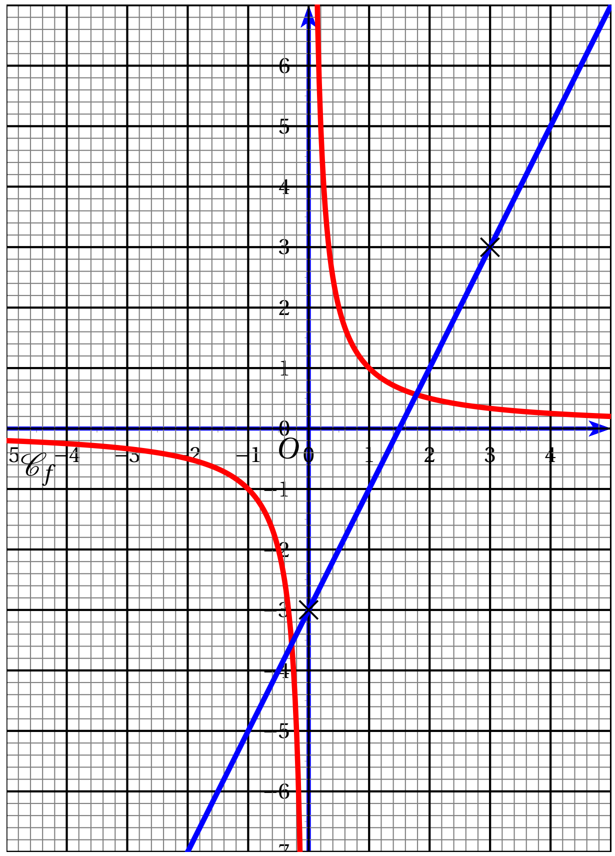
2) Comparer, sans l'aide de la calculatrice, les nombres $\dfrac{1}{-3,14}$ et $\dfrac{1}{-\pi}$

   - -3,14 et $-\pi$ sont négatifs.
   - Sur $]-\infty\,;\,0[$, f est décroissante donc renverse l'ordre.
   - $-3,14 > -\pi$

   Donc $f(-3,14 < f(-\pi))$ donc $\boxed{\dfrac{1}{-3,14} < \dfrac{1}{-\pi}}$

Exercice V

On considère la courbe représentative de la fonction inverse, qu'on appelle **hyperbole**.



1. On veut résoudre graphiquement l'équation

$$\frac{1}{x} = 2x - 3.$$

Pour représenter graphiquement la droite représentative de la fonction affine g, on calcule les coordonnées de deux points.

x	0	3
$g(x) = 2x - 3$	-3	3

La droite passe par les points de coordonnées (0 ; -3) et (3 ; 3) $\frac{1}{x} = 2x - 3 \iff f(x) = g(x)$.
Les solutions de cette équation sont les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.
Il y a deux solutions. On trouve approximativement :
$\boxed{\mathscr{S} = \{-0,3\ ;\ 1,8\}}$