2$^{\text{nde}}$: correction du TD nº 15 sur les vecteurs (colinéarité)

Exercice I

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.

   $\det\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\begin{vmatrix}6 & -12\\-4 & 8\end{vmatrix}=6\times 8-(-4)\times(-12)$
   $=48-48=\boxed{0}$.
   $\det\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

2. Même question avec $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{7}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\\sqrt{7}+1\end{pmatrix}$.

   $\det\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\begin{vmatrix}\sqrt{7}-1 & 6\\1 & \sqrt{7}+1\end{vmatrix}$
   $=\left(\sqrt{7}-1\right)\left(\sqrt{7}+1\right)-1\times 6=\sqrt{7}^2-1^2-6$
   $=7-1-6=\boxed{0}$.
   $\det\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

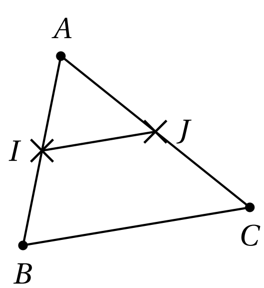
Exercice II

On considère, dans un repère, les points $A(-2\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 1)$ et $C(4\ ;\ 0)$.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\1-3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}}$.
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-(-2)\\0-3\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}}$.
- $\det\left((\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}4 & 6\\-2 & -3\end{vmatrix}=-12-(-12)$
  $=-12+12=\boxed{0}$
- Puisque leur déterminant est nul, les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : A, B et C sont alignés.

Exercice III

ABC est un triangle quelconque. I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$.



a) $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) (a) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$

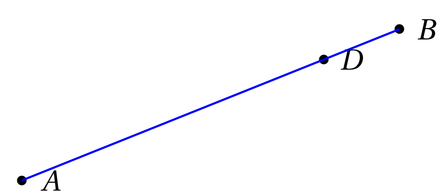
   (b) On en déduit :
   $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$
   $=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

   Donc : $\boxed{\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$ (on retrouve un résultat de la réciproque du théorème de Thalès)

Exercice IV

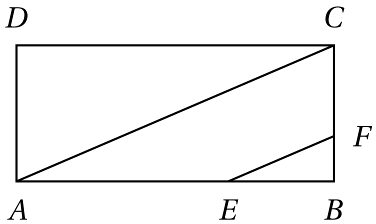
Soit $[AB]$ un segment. On veut construire le point D tel que $\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AD}+4\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$
$=-\overrightarrow{AD}+4\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=-5\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AB}$.
Donc : $\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}}$.



Exercice V Trois méthodes pour montrer le même résultat

Soit ABCD un rectangle. Soit E le point du segment [AB] tel que AE $= \dfrac{2}{3}$AB et le point F du segment [BC] tel que BF $= \dfrac{1}{3}$BC.



Méthode 1 : solution analytique

1) Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}})$, on a :

$A(0\;;\;0)$, $B(1\;;\;0)$, $C(1\;;\;1)$, $D(0\;;\;1)$, $E\left(\dfrac{2}{3}\;;\;0\right)$ et $F\left(1\;;\;\dfrac{1}{3}\right)$.

2) $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$; $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}}$.

Il est clair que $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Méthode 2 : solution vectorielle

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\boxed{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
Alors $(EF)\parallel(AB)$

Méthode 3 : utilisant les configurations

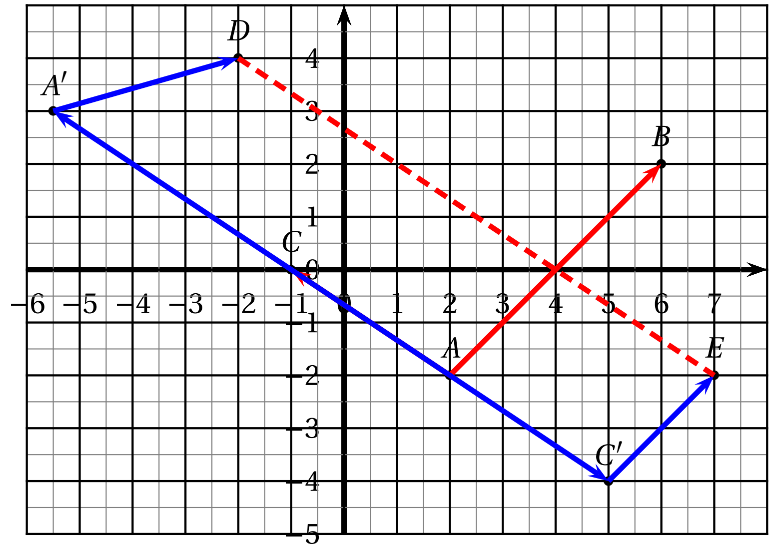
Dans le triangle BAC, $\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{1}{3}$.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AC) sont parallèles et $EF=\dfrac{1}{3}AC$.

Exercice VI

On considère trois points A , B et C non alignés d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1) Construire les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$



2) On munit le plan d'un nouveau repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.

(a) Dans ce repère, on a :
$A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(0\,;\,1)$.
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\left(-2\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$
$=-\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boxed{\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}$.

On en déduit : $\boxed{\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}}$ donc $\boxed{E\left(\dfrac{1}{2}\;;\;-1\right)}$

(dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$.

De même : $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$
$=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$
$=\boxed{\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}$.

Alors : $\boxed{\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}}$ donc $\boxed{D\left(\dfrac{1}{2}\;;\;2\right)}$

(b) Dans ce repère :
$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.
Alors : $\overrightarrow{DE}=3\overrightarrow{CA}$.
Ces deux vecteurs sont colinéaires et les droites (DE) et (CA) sont parallèles.