2^{nde} : correction du TD nº 14 (Fonction carré)

Exercice I

Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carré, donc $f(x) = x^2$.
Calculer :

1) $f(2) = 2^2 = \boxed{4}$
2) $f(-5) = (-5)^2 =: \boxed{25}$
3) $f\left(\sqrt{2}\right)$
4) $f(-1) = (-1)^2 = \boxed{1}$
5) $f(0) = 0^2 = \boxed{0}$
6) $f\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}^2 = \boxed{3}$

Exercice II

f est toujours la fonction carré.

1) Les antécédents de 49 sont les nombres x tels que $x^2 = 49$; ce sont -7 et 7.
2) Les antécédents de 3 sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
3) -5 n'a pas d'antécédent par la fonction carré car aucun nombre réel n'a un carré négatif.
4) L'antécédent de 0 est 0.

Exercice III Logique

f est la fonction carré.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

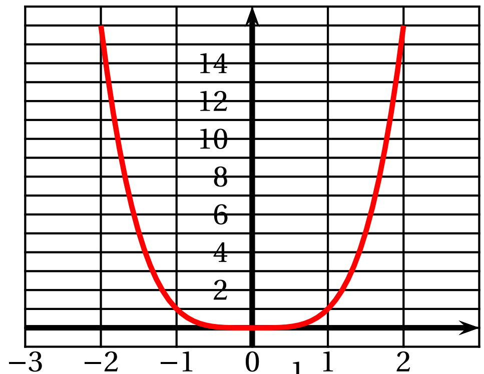
1) Tous les nombres réels ont exactement une image par f.
   OUI ; c'est le cas de toute fonction.
2) Il existe un nombre réel qui n'a pas d'antécédent par f.
   OUI ; par exemple, -5.
3) Tous les nombres réels ont, au plus, un antécédent par f.
   NON ; exemple : 49 a deux antécédents.
4) Il existe au moins un nombre réel qui a deux antécédents par f.
   OUI ; exemple : 49 (tous les nombres strictement positifs ont deux antécédents par la fonction carré).
5) La fonction carrée n'est définie que sur $[0\,;\,+\infty[$.
   NON ; elle est définie sur $\mathbb{R}$.
6) Dans un repère quelconque, la courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   OUI ; en effet, c'est une fonction paire.
7) Le nombre 9 a exactement deux antécédents par la fonction carré.
   OUI ; ce sont -3 et 3.
8) Le maximum de la fonction carré est 0.
   NON ; 0 est le minimum.

9) Le maximum de la fonction carré sur $[3\,;\,4]$ est 9.
NON : c'est 16

10) Le maximum de la fonction carré sur $[3\,;\,4[$ est 16.
OUI ;

Exercice IV

1) Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 = [(-1) \times x]^4 = (-1)^4 \times x^4 = x^4 = f(x)$ donc f est paire.
$\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'ordonnée.



2) Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

   (a) Pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = (-x)^2 + \dfrac{1}{(-x)^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

   (b) Pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = f(x)$.

   (c) Òn en déduit que f est paire.

3) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

   (a) • $f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = \boxed{2}$
   • $f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = \boxed{0}$

   (b) f est paire si, pour tout x, $f(-x) = f(x)$.
   Or $f(-1) \neq f(1)$ donc f n'est **pas paire.**

Exercice V

f est la fonction carré. Compléter le tableau de variation ci-dessous ;

1)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2) $2,24 < 2,25$; ce sont des nombres positifs. Sur $[0\,;\,+\infty[$, f est croissante donc respecte l'ordre.
On en déduit : $\boxed{2,24^2 < 2,25^2}$

3) Comparer avec une méthode analogue
-3,134 et -3,136 sont négatifs ; $-3,134 > -3,136$ et sur $]-\infty\,;\,0]$, f est décroissante donc renverse l'ordre.
On en déduit : $\boxed{(-3,134)^2 < (-3,236)^2}$

4) 3 et π sont positifs ; $3 < \pi$ et la fonction f est croissante sur $[0 + \infty[$ donc conserve l'ordre.
Alors : $\boxed{3^2 < \pi^2}$

5) On veut comparer $(-3,223)^2$ et $3,32^2$.
L'un des nombres est négatif et l'autre positif ; f n'est pas monotone (change de sens de variaton) sur $\mathbb{R}$, donc on ne peut pas utiliser les méthodes vues ci-dessus.

a) f est paire donc $(-3,223)^2 = f(-3,223) = f(3,223)$.

b) $3,223 < 3,32$ donc $\boxed{3,223^2 < 3,32^2}$ (fonction croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$)

c) On en déduit que $\boxed{(-3,223)^2 < 3,32^2}$