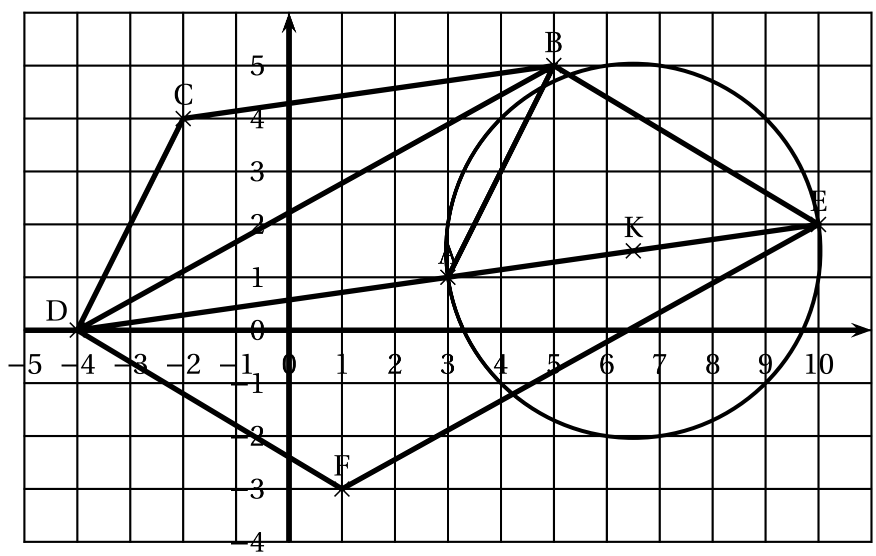
Correction des exercices sur milieu et la longueur d'un segment

Exercice I

Dans un repère (O ; I ; J), on considère les points A (3 ; 1) B(5 ; ,5) C(-2 ; 4) D(-4 ; 0) E(10 ; 2) F(1 ; -3).

1. Faire une figure.
2. $M\left(\dfrac{x_D+x_E}{2}\ ;\ \dfrac{y_D+y_E}{2}\right)$ donc $M\left(\dfrac{-4+10}{2}\ ;\ \dfrac{0+2}{2}\right)$; $\boxed{M(3\ ;\ 1)}$.
   M et A ont les mêmes coordonnées donc $\boxed{M=A}$.
3. $N\left(\dfrac{x_B+x_F}{2}\ ;\ \dfrac{y_B+y_F}{2}\right)$ donc $N\left(\dfrac{5+1}{2}\ ;\ \dfrac{5+(-3)}{2}\right)$; $\boxed{N(3\ ;\ 1)}$.
   $N=A$. A est le milieu de $[DE]$.
4. Les diagonales de $EBDF$ se coupent en leur milieu A, donc $EBDF$ est un parallélogramme.
5. $\boxed{R\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)}$.
6. $\boxed{S\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)}$.
7. K est le milieu de $[AE]$: $K\left(\dfrac{13}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$



Exercice II

Soient les points $A(0\ ;\ 2)$ et $M(2\ ;\ 5)$.

On doit avoir $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ donc $2x_Mx_A+x_B$.

‘ On en déduit $x_B=2x_M-x_A=2\times2-0=4$.

De même : $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ donc $2y_My_A+y_B$.

‘ On en déduit $y_B=2y_M-y_A=2\times5-2=8$.

Alors : $\boxed{B(4\ ;\ 9)}$

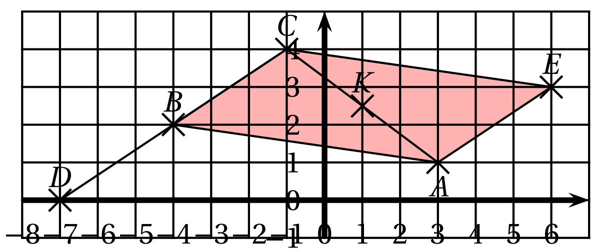
Exercice III

On considère les points A(3 ; 1), B(-4 ; 2) et C(-1 ; 4).

1. Déterminons les coordonnées du point D, symétrique de C par rapport à B.
   B doit être le milieu de $[CD]$ donc :
   $$\begin{cases} x_B = \dfrac{x_C + x_D}{2} \\ y_B = \dfrac{y_C + y_D}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} -4 = \dfrac{-1 + x_D}{2} \\ 2 = \dfrac{4 + y_D}{2} \end{cases} \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} -8 = -1 + x_D \\ 4 = 4 + y_D \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_D = -7 \\ y_D = 0 \end{cases}.$$
   D a pour coordonnées $\boxed{D(-7\ ;\ 0)}$.

2. (a) On note E le point du plan tel que les segments [AC] et [BE] aient le même milieu.
   Notons K le milieu de $[AC]$:
   $$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_K = \dfrac{3 + (-1)}{2} \\ y_K = \dfrac{1 + 4}{2} \end{cases} \quad \text{donc :} \boxed{K\left(1\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)}.$$
   K doit être le milieu de $[BE]$ donc :
   $$\begin{cases} 1 = \dfrac{-4 + x_E}{2} \\ \dfrac{5}{2} = \dfrac{2 + y_E}{2} \end{cases} \quad \text{qui donne :} \begin{cases} x_E = 6 \\ y_E = 3 \end{cases}.$$
   E a pour coordonnées $E(6\ ;\ 3)$

   (b) Les diagonales $[AC]$ et $[BE]$ ont le même milieu donc $AECB$ est un parallélogramme.



Exercice IV

On considère les points $R(1\ ;\ 5)$, $S(-1\ ;\ 7)$ et $T(1\ ;\ 9)$.

1. Soit K le milieu de la diagonale $[RT]$: $K\left(\dfrac{x_R + x_T}{2}\ ;\ \dfrac{y_R + y_T}{2}\right)$ donc $K(1\ ;\ 7)$.
   Pour que $RSTU$ soit un parallélogramme, K doit être le milieu de $[SU]$ donc :
   $$\begin{cases} 1 = \dfrac{-1 + x_U}{2} \\ 7 = \dfrac{7 + y_U}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \boxed{U(3\ ;\ 7)}$$

2. (a) $RS = \sqrt{(x_S - x_R)^2 + \left(y_S - y_R\right)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   $ST = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + \left(y_T - y_S\right)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (9-7)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

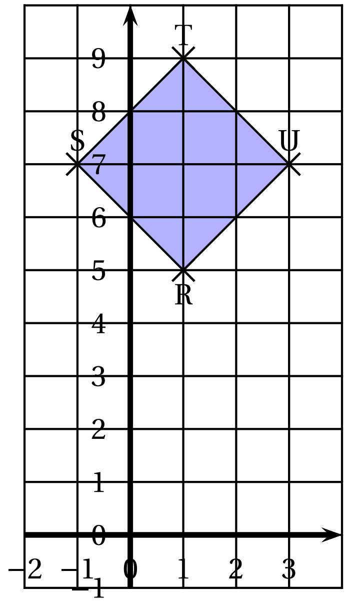
   (b) $RSTU$ est une parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un **losange**.

3. (a) $\boxed{RT = 4}$ (se lit sur la figure), car R et T ont la même abscisse.

   (b) $RT^2 = 4^2 = 16$ et $RS^2 + ST^2 = 8 + 8 = 16$.
   $RT^2 = RS^2 + ST^2$. D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, RST est rectangle en S.

4. $RSTU$ est un posant avec un angle droit : c'est un **carré**.

Figure :



Exercice V

On considère les points A(6 ; 5), B(2 ; -3) et C(-4 ; 0).

1. - $AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $\boxed{AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}}$
   - $BC = \sqrt{(-4-2)^2 + (0-(3))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; $\boxed{BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}}$.
   - $AC = \sqrt{(-4-6)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$; $\boxed{AC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}}$.
2. $AC^2 = 125$; $AB^2 + BC^2 = 80 + 45 = 125$.
   Donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
3. Le périmètre est $\mathscr{P} = AB + BC + AC = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}5\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$; $\boxed{\mathscr{P} = 12\sqrt{5}}$.
   ABC est rectangle en B donc l'aire du triangle ABC est :
   $\mathscr{A} = \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = \dfrac{12\sqrt{5}^2}{2} = 6 \times 5 = 30$; $\boxed{\mathscr{A} = 30}$