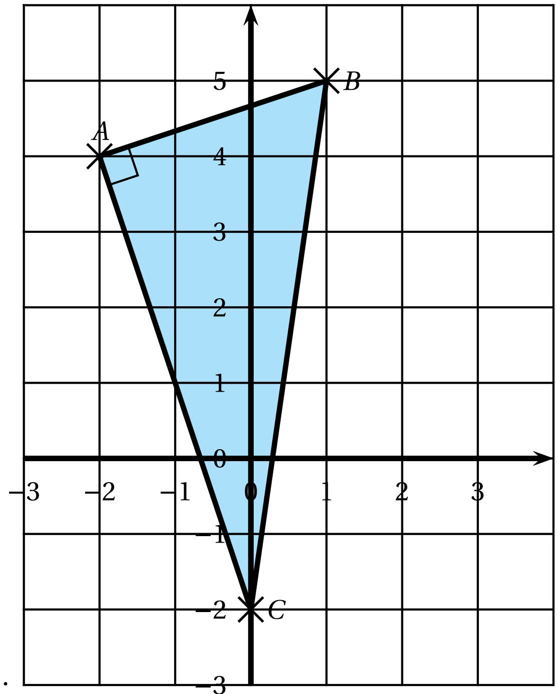
2^{nde} : correction de AP n° 6

Exercice I

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-2; 4) , B(1; 5) et C(0;-2).

1. 

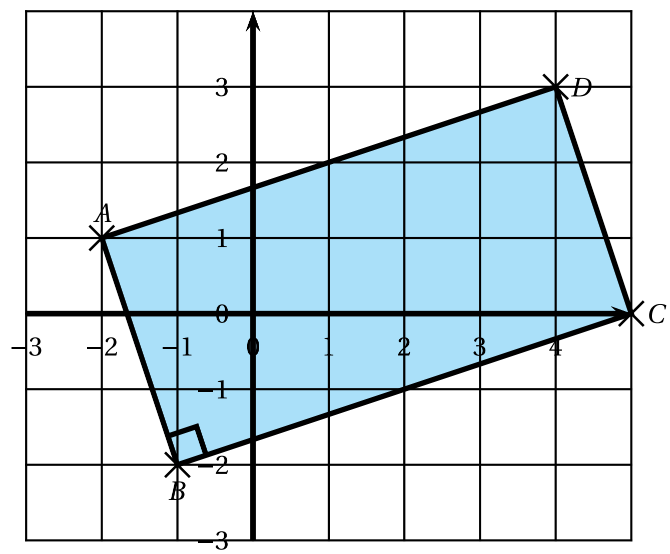
2.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1) - 2 = 2 \\ 5 - 4 = 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$
   - $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}}$
   - $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}}$
3. On utilise les coordonnées des vecteurs précédents :
   - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{10}}$
   - $BC = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = +\sqrt{1 + 49} = \boxed{\sqrt{50}}$
   - $AC = \sqrt{(-2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \boxed{\sqrt{40}}$
4. Le plus grand côté est BC.
   - $BC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$
   - $AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{40}^2 = 10P + 40 = 50$
   - On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
     D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle, ABC et rectangle en A.

Exercice II

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-2; 1) , B(-1; -2), C(5; 0) et D(4; 3).

1.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 - (-2) = 1 \\ -2 - 1 = -3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 - 4 = 1 \\ 0 - 3 = -3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$
   - $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Pour montrer que ABCD est même un rectangle, il suffit de montrer que $ABCD$ possède un angle droit. Montrons par exemple que ABC est rectangle en B.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \boxed{\sqrt{10}}$
   - $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \boxed{\sqrt{40}}$
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $AC = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \boxed{\sqrt{50}}$

   Alors :
   - $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$
   - $AB^2 + BC^2 = 10 + 40 = 50$
   - On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
     D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme possédant un angle droit, donc c'est un rectangle.



Exercice III

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O; I; J)
On considère les points $A(1\ ;\ \sqrt{3})$, $C(-1\ ;\ \sqrt{3})$ et $D(0\ ;\ 2\sqrt{3})$.

- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $AC = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ donc $CD = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ donc $AD = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$AC = CD = AD$ donc le triangle ACD équilatéral.

Exercice IV

Dans chacun des cas, indiquer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la fonction f et préciser ,en justifiant, le sens de variation de la fonction.

1) $f(x) = 3x + 5$.
   Le coefficient directeur vaut 3, leur donner à l'origine vaut 5. Le coefficient directeur est positif donc la fonction est croissante.
2) $f(x) = -x + 0,9$
   Le coefficient directeur est -1, l'ordonnée à l'origine est 0,9. Le coefficient directeur est négatif donc la fonction affine est décroissante.
3) $f(x) = 2 - 3x$
   Le coefficient directeur est -3, l'ordonnée à l'origine est 2. Le coefficient directeur est négatif donc la fonction affine est décroissante.
4) $f(x) = -3 + \frac{1}{2}x$.
   Le coefficient direct est $\frac{1}{2}$, l'ordonnée à l'origine est -3. Le coefficient directeur est positif donc la fonction affine est croissante.

Exercice V

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 7$.

1) Le coefficient directeur est -4; ce coefficient directeur est négatif, donc la fonction est décroissante.
2) Tableau de signes :
   $f(x) = 0$ équivaut à $-7x + 4 = 0$ donc $x = \frac{7}{4}$

x	$-\infty$ $\frac{7}{4}$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	+ 0 −

3) $[2\,;\,3] \subset \left[\frac{7}{4}\,;\,+\infty\right[$ donc sur $[2\,;\,3]$, f est négative.
4) $1 \leqslant \frac{4}{7} \geqslant 2$.
   Sur $[1\,;\,2]$, f change de signe