2$^{\text{nde}}$ correction de AP nº 17 (inéquations)

Exercice I

1) Résoudre les équations et inéquations suivantes

a) $-7x-5=0 \iff -7x=5 \iff \boxed{x=-\frac{5}{7}}$

b) $-7x-5>0 \iff -7x>5 \iff \boxed{x<-\frac{5}{7}}$ (l'inégalité change de sens car on divise par -7, négatif)

c) $3x+8=0 \iff \boxed{x=-\frac{8}{3}}$

d) $3x+8>0 \iff x>-\frac{8}{3}$

2) Pour avoir le signe de l'expression $(-7x-5)(3x+8)$, on renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		$-\frac{5}{7}$		$+\infty$
$-7x-5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(-7x-5)(3x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) L'ensemble des solutions de l'inéquation $(-7x-5)(3x+8)\leqslant 0$ est $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,-\frac{8}{3}\right]\cup\left[-\frac{5}{7}\,;\,+\infty\right[}$

Exercice II

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(x+3)(x-8)\leqslant 0$

- $x+3=0 \iff x=-3$
- $x+3>0 \iff x>-3$
- $x-8=0 \iff x=8$
- $x-8>0 \iff x>8$
- Tableau de signes du produit :

x	$-\infty$		-3		8		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$X-8$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-8)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+3)(x-8)\leqslant 0$ est : $\boxed{\mathscr{S}=[-3\,;\,8]}$

2) $(3x-2)(5x+11)\geqslant 0$

- $3x-2=0 \iff x=\frac{2}{3}$
- $3x-2>0 \iff x>\frac{2}{3}$
- $5x+11=0 \iff x=-\frac{11}{5}$
- $5x+11>0 \iff x>-\frac{11}{5}$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$5x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(3x-2)(5x+11)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,-\frac{11}{5}\right]\cup\left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[}$.

3) $(3x+5)(7x-1)\geqslant(3x+5)(-2x+9)$.

- On se ramène à une comparaison à 0 : $(3x+5)(7x-1)\geqslant(3x+5)(-2x+9) \iff (3x+5)(7x-1)-(3x+5)(-2x+9)\geqslant 0$.
- On voit qu'on peut factoriser :
  On obtient : $(3x+5)\,[(7x-1)-(-2x+9)]\geqslant 0 \iff (3x+5)(9x-10)\geqslant 0$
- $3x+5=0 \iff x=-\frac{5}{3}$ et $3x+5>0 \iff x>-\frac{5}{3}$
- $9x-10=0 \iff x=\frac{10}{9}$ et $9x-10>0 \iff x>\frac{10}{9}$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{9}{10}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	ŝl	$-$	0	$=$	
$9x-10$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(3x+5)(9x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,-\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{9}{10}\,;\,+\infty\right[}$.

4) $\frac{x+3}{x-8}>0$

- Il faut que $x\neq 8$
- On trouve, en renseignant un tableau de signes $=\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,3[\cup]8\,;\,+\infty[}$

5) $\frac{3x+5}{x-7}\geqslant 1$.

-

On doit avoir $x\neq 7$

6) On se ramène à une comparaison à 0.
$\frac{3x+5}{x-7}\geqslant 1 \iff \frac{3x+5}{x-7}-1\geqslant 0 \iff \frac{(3x+5)-(x-7)}{x-7}\geqslant 0 \iff \frac{2x+12}{x-7}\geqslant 0 \iff \frac{2(x+6)}{x-7}\geqslant 0 \iff \boxed{\frac{x+6}{x-7}\geqslant 0}$ (après division par 2).

7) En renseignant un tableau de signes, on trouve : $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-6]\cup]7\,;\,+\infty[}$ (car 7 est une valeur interdite)