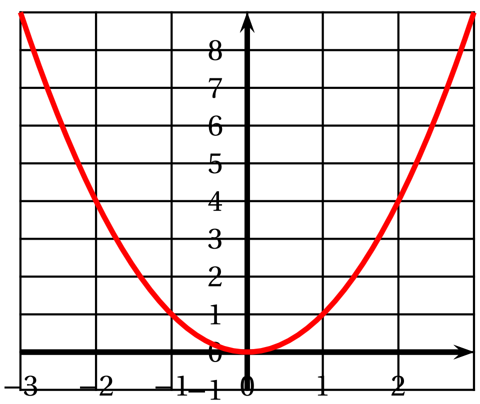
2^{nde} : correction de la séance d'AP nº 15 (fonctions de référence-équations)

Exercice I

Coi-dessous est représentée la fonction carré :

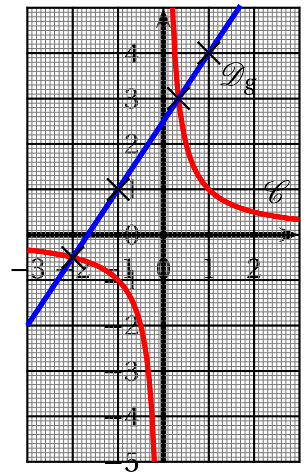


1) $x \in [1\ ;\ 3] \iff 1 \leqslant x \leqslant 3$. x est donc positif et la fonction carré est crosisante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $1^2 \leqslant x^2 \leqslant 3^2$.
On en déduit que : $\boxed{f(x) \in [1\ ;\ 9]}$; l'image de $[1\ ;\ 3]$ est $[1\ ;\ 9]$.

2) $x \in [-3\ ;\ 2] \iff -3 \leqslant x \leqslant 2$.
Lorsque x parcourt cet intervalle, x^2 (sur l'axe des ordonnées) commence à décroître de 9 à 0, puis croît de 0 à 4 ?
L'image de $[-3\ ;\ 2]$ est donc $[0\ ;\ 9]$.

Exercice II

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction inverse.



On souhaite résoudre graphiquement l'équation

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

1) On pose $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.
Représenter la droite $\mathscr{D}_g$, représentative de g.
Pour tracer une droite, il nous faut les coordonnées de deux points :
remplissons un tableau de valeur

x	-1	1
$g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$	1	4

2) L'équation équivaut à $f(x) = g(x)$; des solutions sont des abscisses, des points d'intersection des deux courbes. Les solutions sont :
$x_1 \approx -2$ et $x_2 \approx 0,3$

3)
- $f(-2) = -\frac{1}{2}$ et $g(-2) = \frac{3}{2} \times (-2) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $f(-2) = g(-2)$.
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ et $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$ donc $f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right)$.

-2 et $\frac{1}{3}$ sont bien solutions de cette équation, ce qui confirme les valeurs approchées trouvées.

Exercice III

1) $3x+5=7x-2 \iff 3x-7x=-2-5 \leqslant -4x=-7$
$\iff x=\dfrac{-7}{-4}=\dfrac{7}{4}$; $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{7}{4}\right\}}$

2) $\dfrac{3}{4}x+5=\dfrac{1}{2}x-9 \iff \dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}x=-9-5 \iff \dfrac{1}{4}x=-14 \iff x=-14\times 4 \iff \boxed{x=-56}$; $\boxed{\mathscr{S}=\{-56\}}$

3) $\dfrac{x+4}{x-5}=10$
La valeur interdite est 5 ; $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.
Pour $x\neq 5$:
$\dfrac{x+4}{x-5}=10 \iff x+4=10(x-5)$
$\iff x+4=10x-50 \iff -9x=-54$
$\iff x=\dfrac{-54}{-9}=6.$
$\boxed{\mathscr{S}=\{6\}}$

4) $(3x+7)(9x-2)=0.$
Un produit de facteurs est nul, si et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- premier cas : $3x+7=0 \iff 3x=-7$
$\iff x=-\dfrac{7}{3}$
- deuxième cas : $9x-2=0 \iff x=\dfrac{2}{9}$

L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{7}{3}\,;\,\dfrac{2}{9}\right\}}$

Exercice IV

Un père a 45 ans, son fils 9 ans.
Dans combien d'années aura-t-il le triple de l'âge du fils ?
Notons x le nombre d'années à attendre.
L'âge du père sera $45+x$.
Celui du fils sera $9+x$.
On aura : $45+x=3(9+x) \iff 45+x=27+3x$
$\iff 45-27=3x-x \iff 18=2x \iff \boxed{x=9}$.
Dans 9 ans, le père aura 54 ans, le fils 18 ans et 54 eh bien le triple de 18

Exercice V

Déterminer un nombre entier sachant que le produit de ce nombre par son suivant surpasse son carré de 13.
Soit x le nombre cherché.
On doit avoir :
$x(x+1)=x^2+13 \iff x^2+x=x^2+13 \iff \boxed{x=13}$.
Ce nombre est 13.

Exercice VI

La somme de trois nombres entiers consécutifs est 711.
Notons x le nombre intermédiaire.
Les trois nombres sont $x-1$; x et $x+1$
On doit avoir : $(x-1)+x+(x+1)=3x$ donc $3x=711$
d'où $x=\dfrac{711}{3}=\boxed{237}$.
Les trois nombres sont 236, 237 et 238.