

Différents ensembles de nombres et intervalles

Table des matières

I	Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels	1
II	Ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs	2
III	Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux	3
IV	Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels	3
V	Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels	4
VI	Rappels sur les inégalités	5
VII	Intervalles finis de $\mathbb{R}$	5
	VII.1 Intervalles fermés	5
	VII.2 Intervalles semi-ouverts	5
	VII.3 Intervalles ouverts	6
VIII	Intervalles infinis de $\mathbb{R}$	6
	VIII.1 Intervalle illimité à droite	6
	VIII.2 Intervalles illimités à droite	6
IX	Intersection et réunion de deux ensembles	7
X	Réunion et intersection de deux intervalles	8
XI	Liens vers des vidéos	8

I Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels



Définition

On appelle nombre entier **naturel** un nombre entier positif ou nul ; les entiers naturels sont les nombres servant à compter les objets (0 n'a été considéré comme nombre que tardivement).

L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 \dots\}$

Remarque : le symbole 0 a été utilisé par les Babyloniens (il y a plus de 2000 ans, les Mayas, les Indiens ; il signifiait l'absence d'unité dans la numération de position (celle que nous utilisons) pour indiquer l'absence d'une unité ; dans l'utilisations des chiffres romains (notation de juxtaposition), le symbole 0 n'existe pas. 0 est apparu en Occident grâce aux arabes, notamment par la traduction de textes arabes du mathématicien Al-Kwarismi vers le VIII^e siècle.

Le mathématicien italien Fibonacci (Leonard de Pise) a une influence déterminante sur l'introduction en Occident de ce nombre (Il a vécu notamment à Bejaïa (Algérie actuelle), en Grèce, Égypte, Proche Orient est promoteur la notation de position . Pour les curieux : cliquer ici : [Histoire du nombre zéro](#).

II Ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs



Définition

Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif ou nul.

L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.

C'est l'ensemble des entiers naturels auquel on adjoint leur opposés.

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\dots\}$.

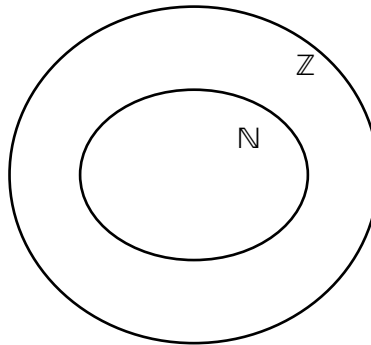
Remarque : $\mathbb{Z}$ est l'initiale du mot allemand Zahl qui veut dire nombre.

Tous les entiers relatifs sont naturels; l'ensemble des entiers naturels est **inclus** dans celui des entiers relatifs; on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Remarques de notation.

- 6 est un nombre naturel. on écrit $6 \in \mathbb{N}$. (On lit « 6 appartient à $\mathbb{N}$ »)
- 6 est aussi un entier relatif; on écrit $6 \in \mathbb{Z}$. (« 6 appartient à $\mathbb{Z}$ »)
- -3 est un entier relatif : on écrit $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$ (-3 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels).
- 7,2 n'est pas un entier naturel : on écrit $7,2 \notin \mathbb{N}$.

Schématiquement :



$\triangle$: Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$.

Un ensemble est inclus dans un ensemble qui le contient; un ensemble est constitué d'éléments; chaque élément de cet ensemble appartient à cet ensemble.

$A \subset B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent à B , mais il peut y avoir des éléments de B qui ne sont pas dans A .

Remarque : Si $A \subset B$ et $B \subset A$ équivaut à dire que $A = B$ (ce sont les mêmes ensembles)

Exemples :

1. une classe de seconde notée A est constituée de deux sous-ensembles, l'ensemble des garçons de la classe, noté G et l'ensemble des filles, noté F . Hugo (noté H est un garçon de la classe)
On a $G \subset A$, $F \subset A$, $H \in G$, $H \in A$, $H \notin F$.
2. Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres entiers naturels pairs.
On écrit : $2 \in \mathbb{P}$ (se lit « 2 appartient à $\mathbb{P}$ ») et $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ (se lit « $\mathbb{P}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ »)

III Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux



Définition

Un nombre x est décimal s'il peut s'écrire comme le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10; $x = \frac{a}{10^k}$.

Il peut s'écrire sous forme décimale avec un nombre **fini** de chiffres.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :

• $7,121 = \frac{7\,121}{1\,000} = \frac{7\,121}{10^3}$ donc 7,121 est un nombre décimal.

• $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Justification : si $\frac{1}{3}$ était décimal, il existait k tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$ donc $3a = 10^k$ ce qui est impossible car 3 ne divise jamais 10^k .

Autre justification : $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ avec une infinité de 3 après la virgule (et il n'y a pas d'autre écriture possible), donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

⚠ : Ce n'est pas parce que l'écriture d'un nombre contient une infinité de décimales que celui-ci n'est pas décimal.

Exemple : le nombre $0,999\,999\ldots$ est égal à 1, car $0,333\,333\ldots = \frac{1}{3}$ donc $0,999\,999\ldots = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

IV Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels



Définition

a est un nombre rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs, q non nul.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. (Q pour quotients)

Exemples :

• $\frac{2}{3}$ est rationnel

• $2,33 = \frac{233}{100}$ donc 2,33 est rationnel.

• $\sqrt{2}$ ou π ne sont pas des nombres rationnels.



Propriété (admise)

Tout nombre rationnel r a une forme irréductible **unique**, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b tel que $r = \frac{a}{b}$ et tels que le seul diviseur commun à a et b soit 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

V Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Nous avons vu qu'il existait des nombres qui n'étaient pas rationnels.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ démontrée par les Pythagoriciens ont entraîné la première crise de l'histoire des mathématiques (voir par exemple [ici](#)). D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$; pour les grecs, tout dans la nature est **mesurable**, mais les grecs ne conçoivent que les nombres entiers et les nombres rationnels (comme notion de partage). Or, ils ont montré que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, donc ont trouvé une longueur non mesurable avec les nombres qu'ils connaissaient...

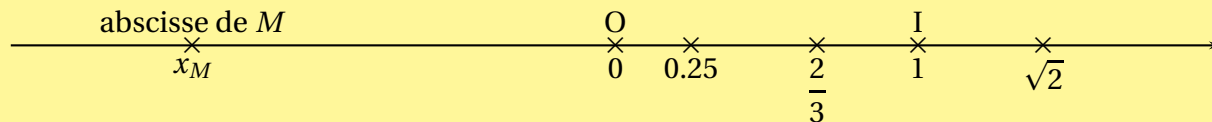
Remarque : ils n'ont pas su régler le problème!

Anecdote : Hippase de Métaponte, aurait été noyé en mer pour avoir divulgué l'irrationalité de $\sqrt{2}$.



Définition

On considère une droite, munie d'un repère $(O; I)$.



L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée droite numérique (ou droite des réels).

À chaque point correspond un nombre unique (son abscisse) et à chaque nombre correspond un point unique.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples :

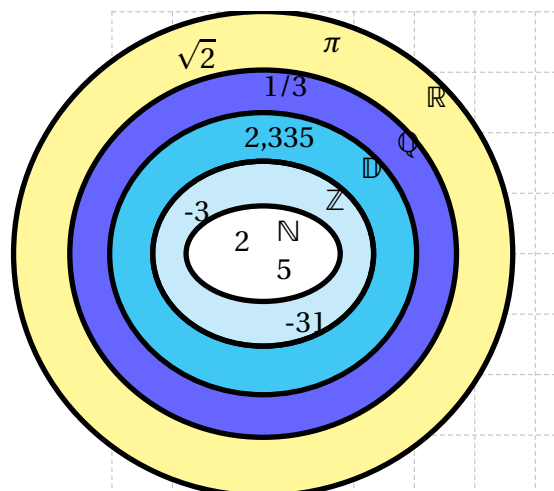
- Tous les nombres que vous connaissez sont des nombres réels.
- π , $\sqrt{2}$ sont des nombres réels, mais ils ne sont pas rationnels

Résumé sur les différents ensembles de nombres :

Nous avons les inclusions (strictes) suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Schématiquement :



VI Rappels sur les inégalités



Rappel :

$<$ signifie « est strictement inférieur à »

$>$ signifie « est strictement supérieur à »

$\leq$ signifie « est inférieur **ou égal** à »

$\geq$ signifie « est supérieur **ou égal** à »

Exemples :

- $2 < 7$ est vrai
- $7 < 7$ est faux
- $2 \leq 7$ est vrai
- $7 \leq 7$ est vrai
- $5 \geq 5$ est vrai car $5 = 5$
- $7 > 2$ est vrai

VII Intervalles finis de $\mathbb{R}$

VII.1 Intervalles fermés



Définition

Soient a et b deux réels.

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est un intervalle, noté $[a ; b]$. a et b sont les bornes de cet intervalle.

On le représente en rouge sur la droite réelle de la façon suivante :



Cet ensemble est un intervalle de $\mathbb{R}$. a et b sont ses bornes. Cet intervalle contient ses bornes. On dit qu'il est fermé.

VII.2 Intervalles semi-ouverts

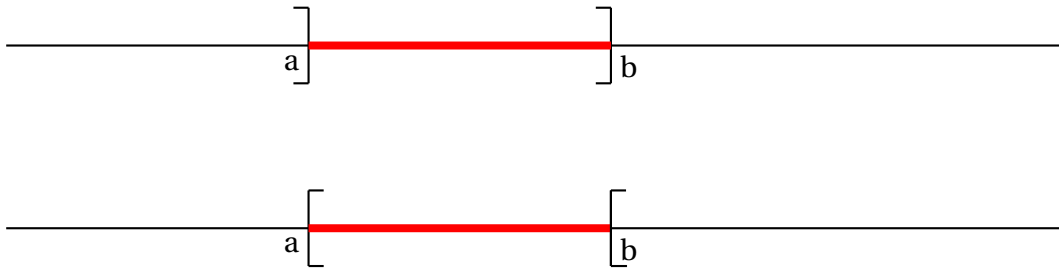


Définition

Soient a et b deux réels.

L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle, noté $]a ; b]$. a et b sont les bornes.

L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est un intervalle, noté $[a ; b[$. a et b sont les bornes.



VII.3 Intervalles ouverts

 **Définition**
 Soient a et b deux réels.
 L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est un intervalle, noté $]a; b[$. a et b sont les bornes.



VIII Intervalles infinis de $\mathbb{R}$

VIII.1 Intervalle illimité à droite

 **Définition**
 L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a; +\infty[$.
 L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est un intervalle, noté $[a; +\infty[$.



Remarque : Le symbole ∞ , qui se lit « infini » a été inventé par le mathématicien John Wallis (1616-1703).
Ce n'est pas un nombre réel.

VIII.2 Intervalles illimités à droite

 **Définition**
 L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a; +\infty[$.
 L'ensemble des réels x tels que $a \leq x$ est un intervalle, noté $[a; +\infty[$.



Définition

L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est un intervalle, noté $] -\infty ; a[$.

L'ensemble des réels x tels que $x \leq a$ est un intervalle, noté $[-\infty ; +a]$.



Remarques :

- Le crochet est fermé, tourné vers l'intérieur, si l'on garde le nombre et ouvert, vers l'extérieur, si l'on rejette le nombre.
- ∞ n'est pas un nombre réel, donc le crochet du côté de l'infini est **toujours** tourné vers l'extérieur.

IX Intersection et réunion de deux ensembles

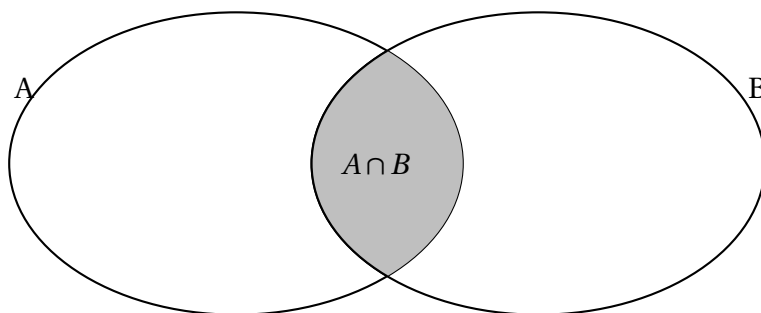
Définition

Soient A et B deux ensembles.

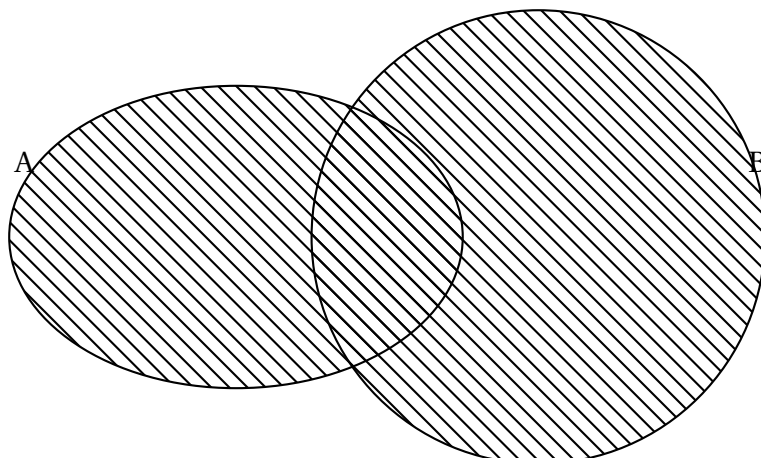
- On appelle intersection de A et B notée $A \cap B$ l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B .
- On appelle réunion de A et B notée $A \cup B$ l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B .

Illustration graphique :

Intersection :



Réunion :



La réunion est la partie hachurée

X Réunion et intersection de deux intervalles



Définition

Soient I et J deux intervalles.

1. L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé l'intersection de I et J . Cet ensemble est noté $I \cap J$.
2. L'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J est appelé la réunion de I et J . Cet ensemble est noté $I \cup J$.

Exemples :

$$[4 ; 5] \cap [2 ; 3] = \emptyset$$

$$[2 ; 5] \cap [2 ; 3] = [2 ; 3]$$

$$[4 ; 7] \cap [6 ; 8] = [6 ; 7]$$

$$[4 ; 7] \cup [6 ; 8] = [4 ; 8]$$

XI Liens vers des videos

- Résumé du cours sur les intervalles : cliquer [ici](#)
- Intersection : cliquer [ici](#)
- Réunion : cliquer [ici](#)