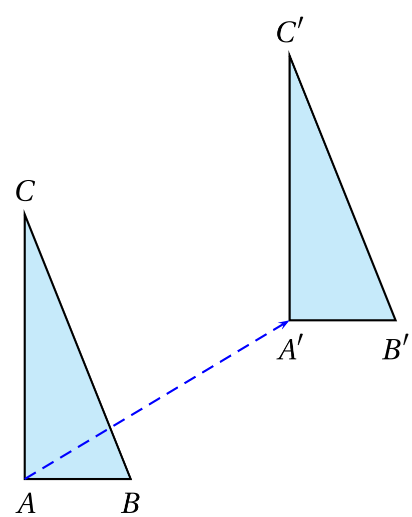
Vecteurs et translations (première partie)

Table des matières

Activité 1 page 196

I Translations

On considère un triangle ABC. On le déplace en le faisant glisser de façon à ce qu'il garde la même orientation par rapport à la feuille de papier ou au tableau. Le sommet A vient en A', B vient en B' et C vient en C'.



On dit qu'on a effectué une **translation** du triangle.
Faire subir une **translation** à un objet revient à le faire glisser en **gardant la même orientation**.

II Vecteur d'une translation

Remarque : Dire qu'on a fait glisser la figure ou qu'on lui a fait subir une translation est **insuffisant**. On ne sait pas où la figure arrive !
Il faut préciser davantage.

Définition

En fait, puisque la figure reste inchangée et qu'elle garde la même orientation, il suffit de préciser le déplacement d'un **seul** point de la figure.
Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le triangle $A'B'C'$.
On dit que l'on a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

Remarque : on aurait pu dire que B allait en en B' ou C en C'. La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$.

Représentation : Si $A \neq A'$, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se représente par une flèche d'origine A et d'extrémité A'.

Vocabulaire

Deux droites ont la même **direction** lorsqu'elles sont parallèles.
Deux voitures qui roulent sur une même route rectiligne vont dans la même direction ; elles peuvent aller dans le même **sens** ou dans des **sens** contraires. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** AB.

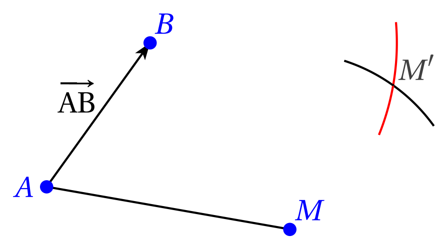
Définition

L'image d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un point M' tel que :

- les droites (AA') et (MM') ont la même **direction** (c'est à dire sont parallèles) ;
- les demi droites [AA') et [MM') ont le même **sens** ;
- les segments [AA'] et [MM'] ont la même longueur ; AA' = MM'

L'image M' d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ se construit au compas. En effet, $ABM'M$ est alors un parallélogramme, donc $AB = MM'$ et $AM = BM'$.

On trace l'arc de cercle de centre B et de rayon AC (car nous devons avoir $AC = BD$).
On trace l'arc de cercle de centre C et de rayon AB (car nous devons avoir $CD = AB$).



III Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils correspondent à la même translation.
D'après ce qu'on a vu auparavant, on en déduit la définition suivante ;

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

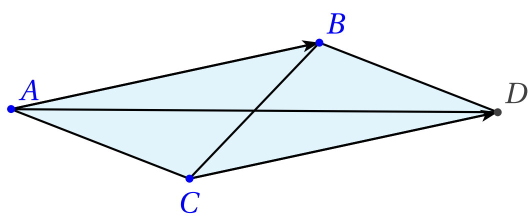
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens :
- les longueurs AB et CD sont égales.

On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Soient deux vecteurs **égaux** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. D'après ce qu'on a vu, les segments [AB] et [CD] sont alors parallèles et de même longueur : on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Remarque : sur la figure du I, on a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC et un parallélogramme (éventuellement aplati).
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu.



Remarque : si l'on ne veut pas préciser les extrémités du vecteur, on lui donne un nom avec une seule lettre, par exemple le vecteur $\overrightarrow{u}$.

Propriétés

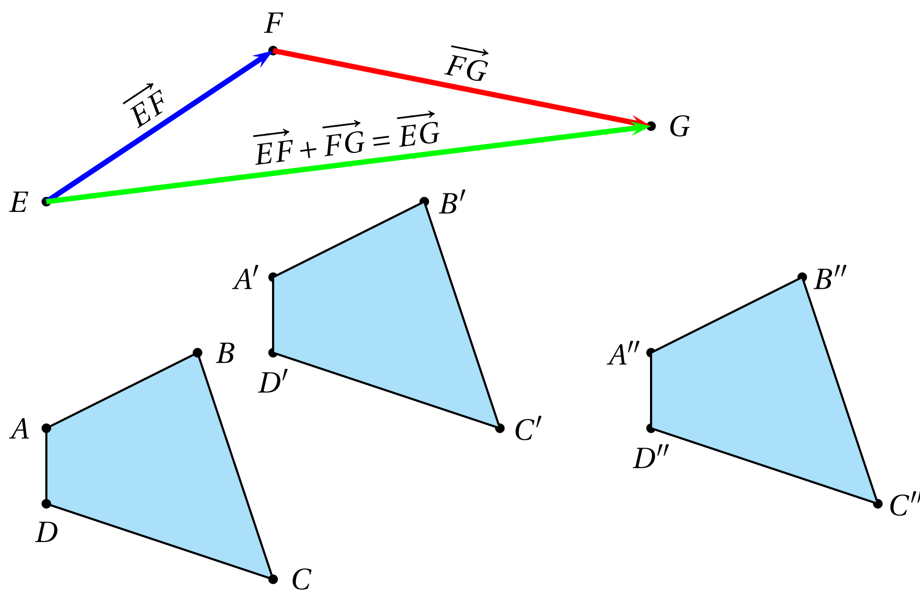
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si B = C.
- K est le milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

Exercice : Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et DC ? Y a-t-il un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$?
3. Conclure.

IV Somme de deux vecteurs

On considère un polygone $ABCD$.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.
$A'B'C'D'$ est l'image du polygone $ABCD$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$. $A''B''C''D''$ est l'image du polygone $A'B'C'D'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.
On voit que faire subir successivement deux translations au polygone $ABCD$ revient à effectuer une seule translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$. On définit la somme de deux vecteurs comme le vecteur associé à la succession des deux translations caractérisées par ces deux vecteurs.

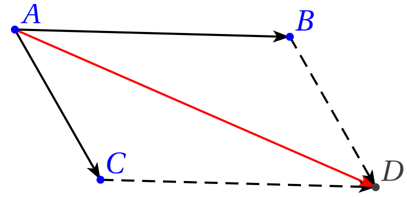


Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points E, F et G, on a : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EG}$

Michel Chasles, né le 15 novembre 1793 à Épernon en Eure-et-Loir et mort le 18 décembre 1880 à Paris, est un mathématicien français, spécialisé en géométrie, notamment projective.
Pour plus de précisions cliquer ici

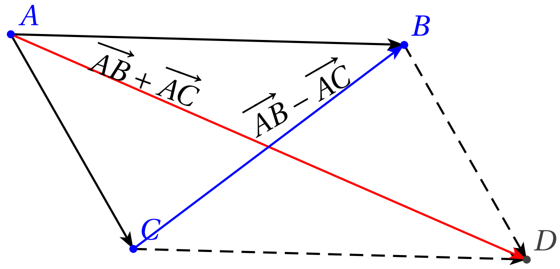
Somme de deux vecteurs de même origine : On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir AB = CD et AC = BD.
Alors : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ (**relation de Chasles**).

Remarque : En appliquant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$, qui laisse tous les points immobiles ; on parle alors de translation de **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\cdots=\overrightarrow{0}$.
Comme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$, par analogie avec l'addition sur les nombres, on pose $\boxed{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}}$.

Exemple : Soit ABDC un parallélogramme. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$. On voudrait représenter également $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\boxed{\overrightarrow{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.

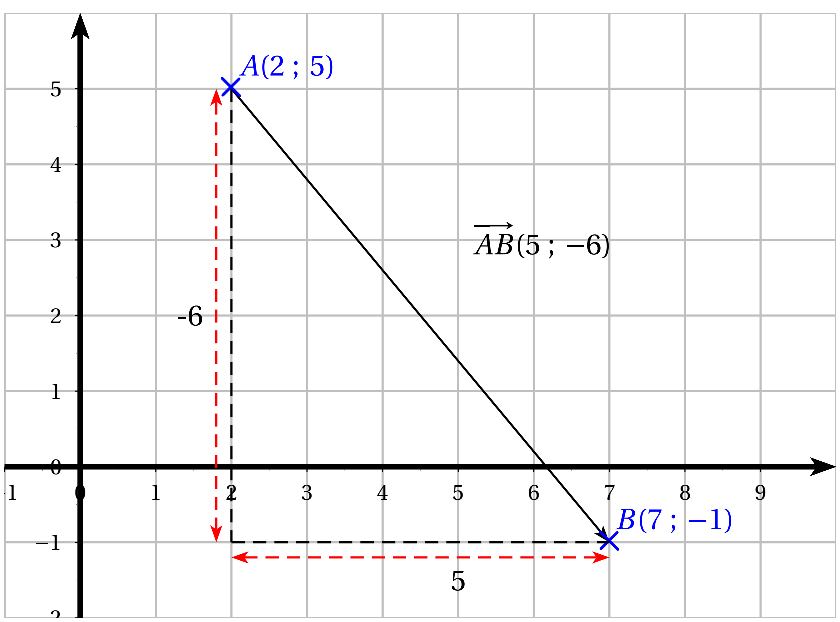


V Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ un repère quelconque. Soient deux points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont x_B-x_A et y_B-y_A et l'on écrit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Remarque : Les coordonnées d'un vecteur servent à savoir de combien d'unités on se déplace parallèlement à chaque axe.



Remarque : deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Applications

Exemple 1 Soient $A(1,2)$, $B(6,4)$, $C(5,1)$ et $D(0,-1)$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

On va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-1=5\\4-2=2\end{pmatrix}$: $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}$.

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-0=5\\1-(-1)=2\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ puisqu'ils ont les mêmes coordonnées, donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.

Exemple 2 Déterminer les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme :
Soient A(2; 3) , B(3; 4) et C(5; 6). On cherche les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.
ABCD est un parallélogramme si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
On note $D\left(x_D\ ;\ y_D\right)$ les coordonnées de D.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-x_D\\6-y_D\end{pmatrix}$. On obtient un système de deux équations :

$$\begin{cases}5-x_D=1\\5-x_D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=4\\y_D=5\end{cases}.$$

D a pour coordonnées $\boxed{D(4\ ;\ 5)}$

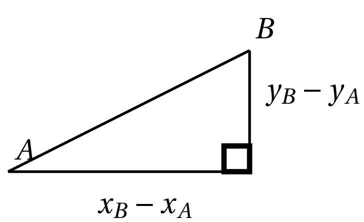
VI Longueur d'un segment

Propriété

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère **orthonormal**. Soient A$\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et B$\left(x_B\ ;\ y_B\right)$. Alors :
$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

Démonstration : Cette formule vient de l'application du théorème de Pythagore.

Remarque : (x_1-x_B) et $\left(y_B-y_A\right)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :
$AB^2=(x_N-x_A)^2+\left(y_B-y-A\right)^2$ d'où la formule.
Remarque : elle convient quelles que soient les positions de A et B puisque l'on calcule les carrés des différences des coordonnées.

Exemple : $A(2\ ;\ -5)$ et $B(-7\ ;\ 1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$ donc : $AB=\sqrt{(-9)^2+6^2}=\sqrt{81+36}=\boxed{\sqrt{117}}$