Équations

Table des matières

I Définition d'une équation

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus.
Résoudre cette équation consiste à trouver **toutes** les valeurs que peuvent prendre ce ou ces nombres inconnus pour que l'égalité soit vraie.

Exemples :

- 2x+3=0 a pour solution le nombre $-\dfrac{3}{2}$
- L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 = -1$ est impossible dans $\mathbb{R}$.

II Méthode générale de résolution

Propriété

On ne change pas une égalité en additionnant le même nombre aux deux membres d el'égalité ou en multipliant ou en divisant les deux membres par un nombre non nul. (principe d'une balance à plateaux)

II.1 Équations du premier degré (équations fondamentales)

Règles de résolution des équations fondamentales

- $x+a=b$ équiavaut à $x+a-=b-$ donc $\boxed{x=b-a}$
- $x-a=b$ équiavaut à $x-a+=b+$ donc $\boxed{x=b+a}$
- $ax=b$ (avec $a \neq 0$) équivaut à $\dfrac{ax}{a}=\dfrac{b}{a}$ donc $\boxed{x=\dfrac{b}{a}}$
- $\dfrac{x}{a}=b$ équivaut à $\dfrac{x}{a}\times a = b \times a$ donc $\boxed{x=ba=ab}$

II.2 Théorème du produit nul)

Théorème

Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Exemple :
On veut résoudre l'équation :
$(2x+3)(-5x+7)=0$.
C'est un produit nul donc :

$$2x+3=0 \qquad \text{ou} \qquad -5x+7=0$$
$$2x=-3 \qquad\qquad -5x=-7$$
$$x=\frac{-3}{2} \qquad\qquad x=\frac{-7}{-5}$$

Méthode de résolution d'une équation dans le cas général :

- Sauf cas particulier, on transpose tout du même côté pour se ramener à une équation du type $A(x)=0$.
- On essaye de factoriser pour utiliser le théorème du produit nul.
  Pour cela, on essaye de repérer un facteur commun, sinon, une identité remarquable. S'il n'y a pas de factorisation possible, on développe.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $(3x+1)(x+4)=3x+1$.
Cette équation est équivalente à $(3x+1)(x+4)-(3x+1)=0$.
On remarque que l'on peut factoriser avec $(3x+1)$ comme facteur commun.
On obtient $(3x+1)[(x+4)-1]=0$ donc $(3x+1)(x+3)=0$.
   - Premier caas : $3x+1=0$ donne $x=-\frac{1}{3}$
   - Deuxième cas : $x+3=0$ donne $x=-3$.

   Conclusion : l'équation a deux solutions : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-3\,;\,-\frac{1}{3}\right\}}$

(b) Résoudre l'équation : $(2x+5)^2=(3x-2)^2$.
On obtient : $(2x+5)^2-(3x-2)^2=0$, soit : $[(2x+5)+(3x-2)]\,[(2x+5)-(3x-2)]=0$ qui s'écrit :
$(5x+3)(-x+7)=0$.
C'est un produit nul donc :

$$5x+3=0 \qquad \text{ou} \qquad -1x+7=0$$
$$5x=-3 \qquad\qquad -1x=-7$$
$$x=\frac{-3}{5} \qquad\qquad x=\frac{-7}{-1}$$

Les solutions sont alors : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{3}{5}\,;\,7\right\}}$.

III Équations du type $x^2=a$

Exemples :

1. $x^2=36 \Leftrightarrow x^2-36=0 \Leftrightarrow x^2-6^2=0 \Leftrightarrow (x+6)(x-6)=0$.

- Premier cas : $x+6=0 \Leftrightarrow x=-6$
- Deuxième cas : $x-6=0 \Leftrightarrow x=6$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{-6\,;\,6\}}$.

2. $x^2=7 \Leftrightarrow x^2-7=0 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{7}^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt{7}\right)=0.$

- Premier cas : $x+\sqrt{7}=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{7}$
- Deuxième cas : $x-\sqrt{7}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{7}$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}\right\}}$.

Cas général :

- Si $a<0$, l'équation n'a pas de solution, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc x^2 ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif.
- $x^2=0$ a pour solution $x=0$
- Soit $a>0$; l'équation s'écrit $x^2-a=0$, c'est-à-dire $x^2-\left(\sqrt{a}\right)^2=0$ qui se factorise en $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right)=0$.
  L'équation a donc deux solutions : $\boxed{\mathscr{S}=\{-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}\}}$.

IV Équation sous forme d'un quotient

Propriété

L'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$ équivaut à $B(x)\neq 0$ et $A(x)=0$

On commence par chercher les valeurs « interdites » qui annulent le dénominateur. L'ensemble de définition (valeurs réelles pour lesquelles l'expression globale est définie) est alors $\mathbb{R}$, privé de ces valeurs interdites.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $\dfrac{2x+3}{x-1}=0$.
Condition d'existence : $x-1\neq 0$ donc $x\neq 1$.
Pour $x\neq 1$, l'équation s'écrit : $2x+3=0$ qui donne $x=-\dfrac{3}{2}$.
$-\dfrac{3}{2}\neq 1$ donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}}$.

(b) Résoudre $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$.
On commence par résoudre l'équation $x+1=0$ qui a pour solution $x=-1$.
L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
On suppose maintenant $x\neq -1$.
L'équation s'écrit alors : $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0$ qui a pour solutions -1 et 1.
Or, $x\neq -1$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\boxed{\mathscr{S}=\{1\}}$.