Géométrie repérée dans le plan

Table des matières

I Coordonnées du milieu d'un segment

Définition

Soient deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ deux points.

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Cela revient à calculer la moyenne des abscisses et des ordonnées.

Exemples d'application : Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points $A(3\ ;\ 7)$ et $B(5\ ;\ 2)$.

Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont :

$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc $M\left(\dfrac{3+5}{2} \dfrac{7+2}{2}\right)$ d'où $\boxed{M\left(4\ ;\ \dfrac{9}{2}\right)}$

Exemple 1

Exemple 1

Dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points A(-3 ; -1), B(5 ; -2), C(7 ; 3) et D(-1 ; 4).

Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Solution de l'exemple 1

Notons K et L les milieux des deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

$x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

$x_L = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{5+(-1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $y_L = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

K et L sont les mêmes coordonnées donc $K = L$.

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : $\boxed{\text{ABCD est un parallélogramme}}$.

Exemple 2

On considère les points A(2 ; 5), B(-1 ; 7) et C(11 ; 13).
On cherche les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

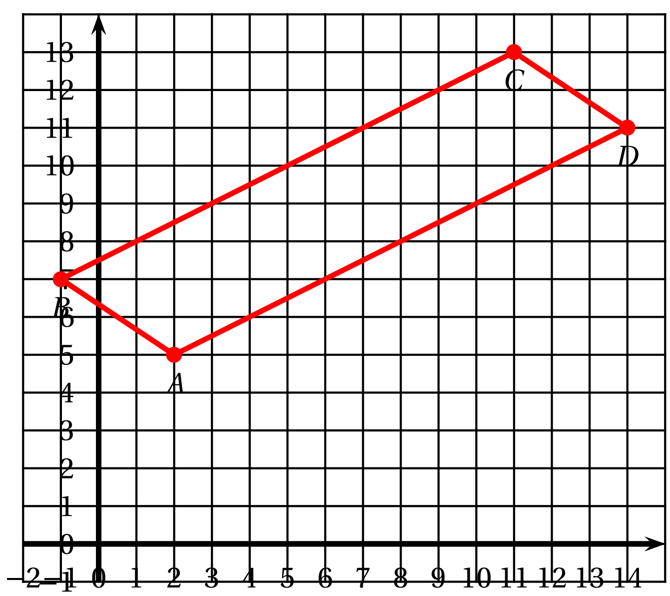
Solution de l'exemple 2

On note x_{D} et y_{D} les coordonnées de D.
ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.
Soit M le milieu de [AC] ; on a :
$$\begin{cases} x_{\mathrm{M}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{C}}}{2} = \dfrac{13}{2} \\ y_{\mathrm{M}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{C}}}{2} = 9 \end{cases}.$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont : $\begin{cases} \dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{-1 + x_{\mathrm{D}}}{2} \\ \dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{7 + y_{\mathrm{D}}}{2} \end{cases}$

Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :
Donc $\dfrac{-1 + x_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{13}{2}$ d'où $-1 + x_{\mathrm{D}} = 13$, donc $x_{\mathrm{D}} = 14$.
$\dfrac{7 + y_{\mathrm{D}}}{2} = 9$ donc $7 + y_{\mathrm{D}} = 18$ d'où $y_{\mathrm{D}} = 11$.
D a pour coordonnées $\boxed{\text{D(14 ; 11)}}$.

Vérification géométrique : on place les points pour vérifier que le quadrilatère ressemble à un parallélogramme.

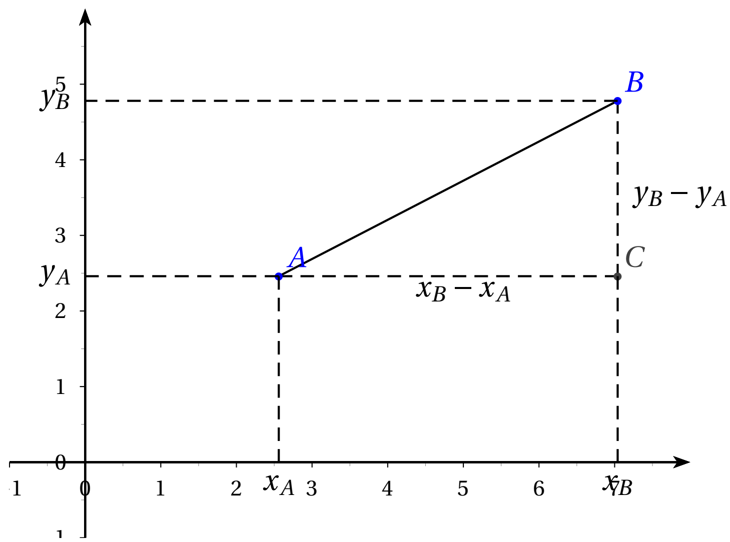


II Distance entre deux points

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).
On considère les points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$.
Alors, la distance AB vaut : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

Démonstration :
Supposons que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$.
Cette démonstration est basée sur le théorème de Pythagore.



Comme le repère est **orthonormé**, le triangle ABC est rectangle, puisqu'il a deux côtés parallèles aux axes.
D'après le **théorème de Pythagore**, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$.

Par conséquent : $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}}$.

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B,
car $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ et $\left(y_B - y_A\right)^2 = \left(y_A - y_B\right)^2$.

Remarque : cette formule est à apprendre par cœur et à appliquer directement.

Exemple : Soient $A(3\ ;\ 7)$ et $B(2\ ;\ 13)$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (13-7)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$ donc $\boxed{AB = \sqrt{37}}$

Exercice 1 :
Montrer que le point $A\left(1\ ;\ \sqrt{2}\right)$ appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + \left(y_A - y_O\right)^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$.
La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

Exercice 2 :
Soient $A(1\ ;\ -2)$ et $B(4\ ;\ 2)$.
Montrer que B appartient au cercle de centre $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 5.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice 3 :
Soient $A(-2\ ;\ -1)$, $B(1\ ;\ 3)$ et $C(-3\ ;\ 6)$.
Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

- $AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

- $BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $AC = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$
- $AB = BC$ donc ABC est isocèle.
- $AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50$; $AB^2 + BC^2 = 5^2 + (^2 = 25 + 25 = 50$.
  $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
  D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.
  Il est donc $\boxed{\text{isocèle rectangle en B}}$.