

# Fonctions : généralités

## Table des matières

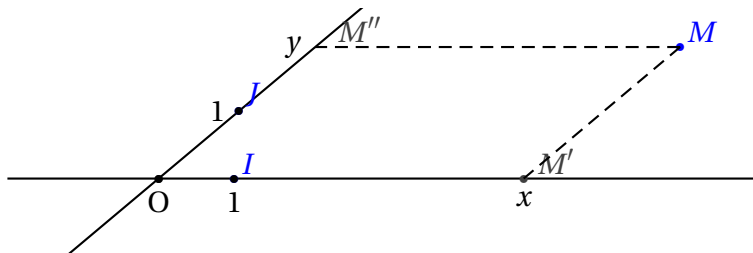
I	Rappel sur les coordonnées	1
II	Notion de fonction	2
III	Courbe représentative	3
IV	Variations d'une fonction	4
IV.1	Sens de variation	4
IV.2	Tableau de variation d'une fonction	5
IV.3	Extremum :	7

## I Rappel sur les coordonnées

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites sécantes en un point  $O$ . Ces deux droites sont appelées axes.

Sur chaque axe, on choisit une unité de longueur en plaçant deux points  $I$  et  $J$ .

On dit alors que  $(O ; I ; J)$  est un repère du plan.



On prend un point  $M$  quelconque ; on trace deux droites passant par  $M$  et parallèle aux axes ; elles coupent ces deux axes en  $M'$  et  $M''$ , qui sont repérés par deux nombres  $x$  et  $y$ .  $x$  est l'abscisse de  $M$  et  $y$  l'ordonnée de  $M$ .

$x$  et  $y$  sont alors les coordonnées de  $M$  ; on écrit  $M(x ; y)$  ou  $M(x_M ; y_M)$ .



### Définition

- On dit que le repère est orthogonal si, et seulement si, les deux axes sont orthogonaux.
- On dit que le repère est orthonormé ou orthonormal si, et seulement si, les deux axes sont orthogonaux et l'unité sur les deux axes est la même ( $OI = OJ$ ).

## II Notion de fonction

### Définition

Soit  $\mathcal{D}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou une réunion d'intervalles.

Une fonction numérique  $f$ , définie sur  $\mathcal{D}$ , est un procédé qui, à chaque nombre de  $x$  de  $\mathcal{D}$  associe un **unique** nombre, noté  $f(x)$ .

$\mathcal{D}$  est l'ensemble de définition de  $f$ ; c'est l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x)$  existe.

Le réel  $x$  est appelé la **variable**.  $f(x)$  est **l'image** de  $x$  par  $f$ .

$x$  est un **antécédent** de  $f(x)$ .

On écrit :  $f : \begin{matrix} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$  ou plus simplement :  $f : x \mapsto f(x)$ .

### Exemples :

1. On enregistre la température en un endroit précis sur une période de 24 heures.  $T : x \mapsto y = T(x)$  où  $T(x)$  est la température à l'instant  $x$ .
2. On enregistre la hauteur d'eau dans un port en fonction de l'heure (elle varie en fonction de la marée).
3.  $v(x)$  est la vitesse d'une voiture à  $x$  km de son point de départ sur un circuit automobile.
4.  $f(x)$  est la carré du nombre  $x$  : Sur  $\mathbb{R} : f : x \mapsto x^2$ .
5.  $\mathcal{D} = ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[ : f : x \mapsto \frac{1}{x}$   
 $\frac{1}{x}$  n'existe que si  $x \neq 0$  car on ne peut pas diviser par 0.  
**Remarque :**  $]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$  se note aussi  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ou  $\mathbb{R}^*$
6.  $\mathcal{D} = [0 ; +\infty[ : f : x \mapsto \sqrt{x}$
7.  $\mathcal{D} = ]0, 1[ : p : x \mapsto y = p(x)$  où  $y$  est la première décimale de  $x$ .  
On a alors  $p\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ ,  $p(0,123) = 1$

### Remarques

- Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction  $f$ .
- Un nombre peut avoir **plusieurs** antécédents par  $f$ ; exemple : pour  $f(x) = x^2$ , on a  $f(-2) = f(2) = 4$  donc 4 a deux antécédents par  $f$

### Exemples :

1. Sur  $\mathbb{R}$ , on considère la fonction  $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$ .  
Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.
  - $f(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 - 4 = -4$
  - $f(3) = 38$
  - $f(5) = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 - 4 = 96$
  - $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 4 = -5$

2.  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ .  $g(x) = x^2$ .

Quels sont les antécédents (s'ils existent) de -4? de 2?

-1 a-t-il des antécédents?

**Réponses :**

$x$  est un antécédent de -4 si  $g(x) = -4$ , donc  $x^2 = -4$ .

Or,  $x^2 \geq 0$  donc  $x^2$  ne peut pas être égal à -4 qui est négatif.

-4 n'a pas d'antécédent.

Les antécédents de 2 sont les nombres  $x$  tels que  $x^2 = 2$ , donc  $x^2 = 2$ .

2 a donc pour antécédents  $-\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2}$ .

(**rappel** : pour  $a \geq 0$ , l'équation  $x^2 = a$  possède deux solutions,  $-\sqrt{a}$  et  $\sqrt{a}$ ; en effet,  $x^2 = a$  s'écrit  $x^2 - a = 0$ , d'où  $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$  soit  $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$  après factorisation; on a bien les deux solutions proposées, en utilisant le fait qu'un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.)

$x$  est un antécédent de -1 si et seulement si  $g(x) = -1$ , donc si et seulement si  $x^2 = -1$ , ce qui est impossible car  $x^2 \geq 0$ .

-1 n'a pas d'antécédent par  $g$ .

### III Courbe représentative

 **Définition**

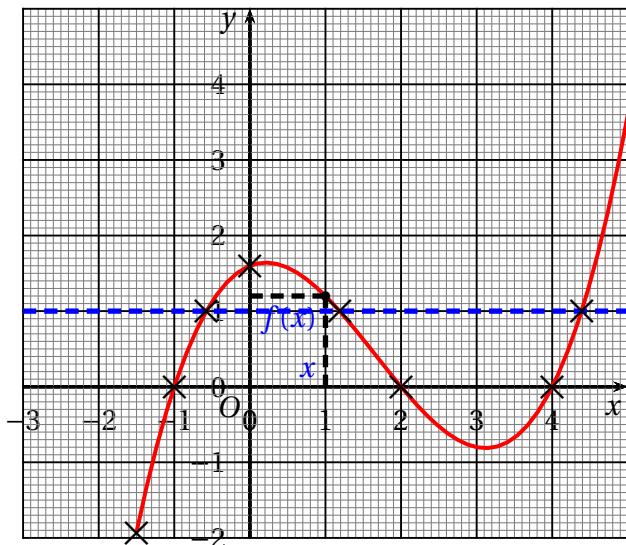
Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$ , représentative de  $f$ , est l'ensemble des points  $M(x; f(x))$  où  $x \in \mathcal{D}$ .

$x$  est donc l'abscisse et  $f(x)$  l'ordonnée d'un point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Exemple :**

Voici la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-1,5; 5]$



**Lecture d'une image :** Quelles sont les images de -1.5? de -1? de 0? de 1? de 2?

L'image de -1,5 est environ égale à -1,9;

$f(-1,5) \approx -1,9$

L'image de -1 est 0 :  $f(-1) = 0$

L'image de 0 est 1,6 :  $f(0) = 1,6$

De même :  $f(1) = 1,2$ ;  $f(2) = 0$

**Lecture d'un antécédent :** Quels sont les antécédents de 0? de 1? de 2? de 4?

Pour lire les antécédents de 0, on regarde les abscisses des points de la courbe qui ont 0 pour ordonnée :

Les antécédents de 0 sont -1, 2 et 4.

Antécédents de 1 : approximativement -0,5; 1,2 et 4,4.

Antécédents de 4 : il n'y en a pas sur l'intervalle considéré.

## IV Variations d'une fonction

### IV.1 Sens de variation

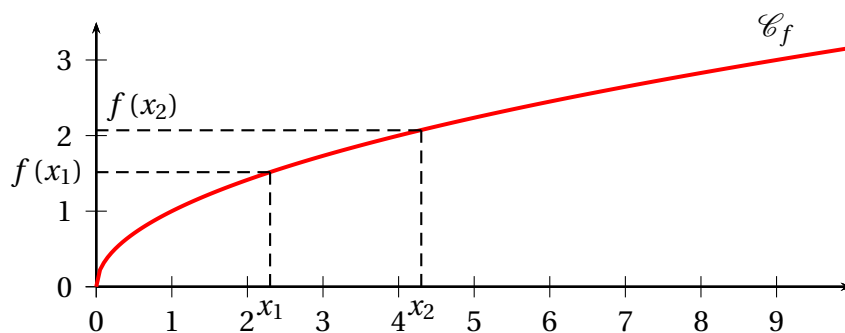


#### Définition

Une fonction  $f$  est croissante sur un intervalle  $I$  signifie que sur l'intervalle  $I$ , si les valeurs de la variable  $x$  augmentent, alors les images  $f(x)$  augmentent aussi.

**Traduction mathématique :** Pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  tels que  $x_1 \leq x_2$ , alors  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .  
(une fonction croissante **conserve l'ordre.**)

#### Illustration graphique :

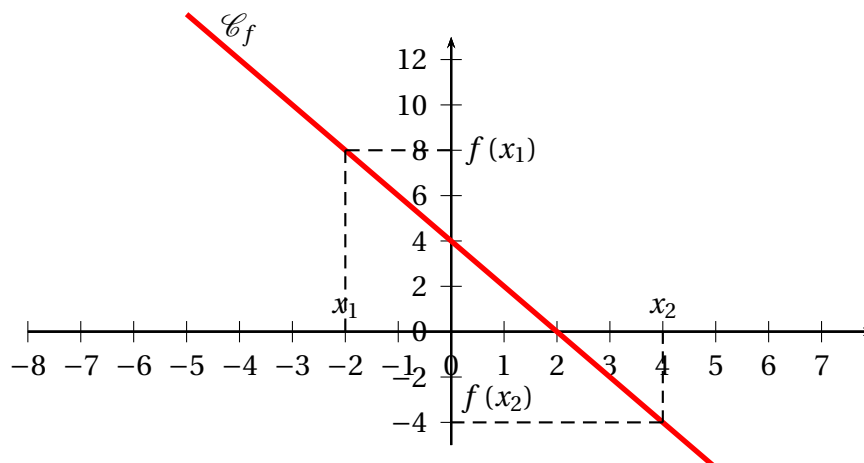


#### Définition

Une fonction  $f$  est décroissante sur un intervalle  $I$  signifie que sur l'intervalle  $I$ , si les valeurs de la variable  $x$  augmentent, alors les images  $f(x)$  diminuent.

**Traduction mathématique :** Pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  tels que  $x_1 \leq x_2$ , alors  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .  
(une fonction croissante **renverse l'ordre.**)

#### Illustration graphique :



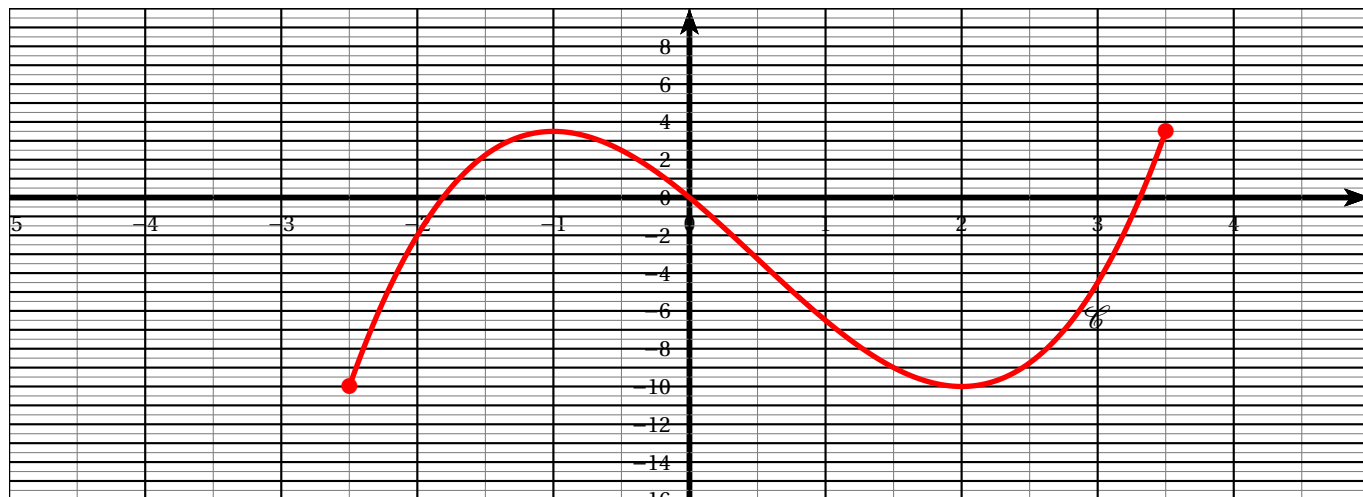
## IV.2 Tableau de variation d'une fonction

Un tableau de variation sert à rassembler visuellement toutes les informations sur les variations d'une fonction.

### Exemples :

1. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x}{2}$  sur  $[-2,5 ; 3,5]$ .

La courbe représentative est



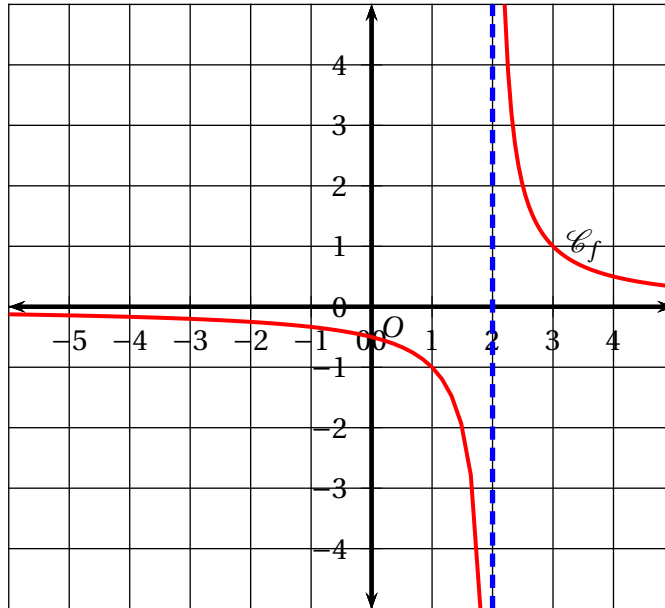
Le tableau de variation de  $f$  est :

$x$	-2,5	-1	2	3,5
$f(x)$		3,5	-10	3,5

$\swarrow$        $\searrow$        $\swarrow$   
 -10                      -10

Une flèche montante indique que la fonction est croissante, une flèche descendante indique que la fonction est décroissante.

2. Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{x-2}$



La fonction  $f$  n'est **pas définie** en  $x = 2$ . 2 est une valeur **interdite**.

L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

On traduit cette situation par une **double barre verticale** dans le tableau de variation et une ligne pointillée dans le graphique. (On verra cela en détail dans le chapitre sur la fonction inverse.)

La fonction est décroissante sur  $] -\infty ; 2[$  et sur  $]2 ; +\infty[$ . Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ ,  $f(x)$  se rapproche de plus en plus de 0, de même que quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Le tableau de variation est :

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	0	+	$+\infty$
		-	0

### IV.3 Extremum :

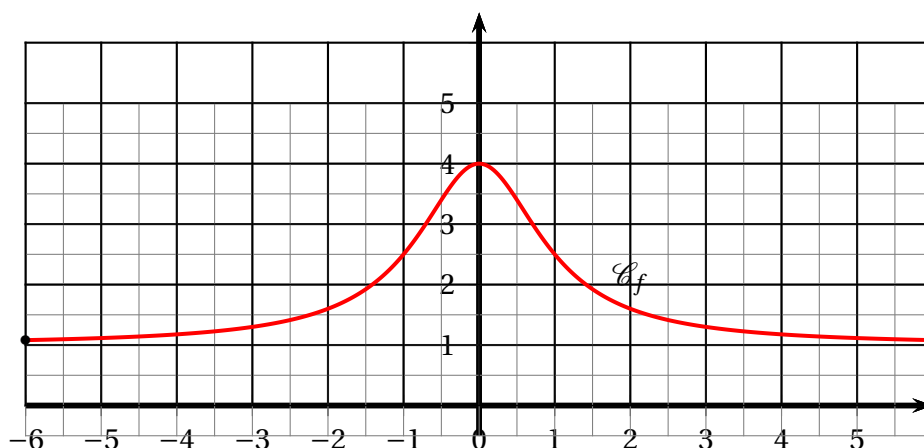
#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}$ .

$f$  admet un maximum en  $a \in \mathcal{D}$  si, pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}$ ,  $f(x) \leq f(a)$ .  $f$  admet un minimum en  $a \in \mathcal{D}$  si, pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}$ ,  $f(x) \geq f(a)$ .

$f$  admet un extremum en  $a$  si  $f$  admet un maximum ou un minimum.

**Exemple** : Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-6 ; 6]$  par  $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2 + 1}$  dont voici la courbe représentative :



Cette fonction est croissante sur  $] -6 ; 0]$  et décroissante sur  $[0 ; 6[$ .

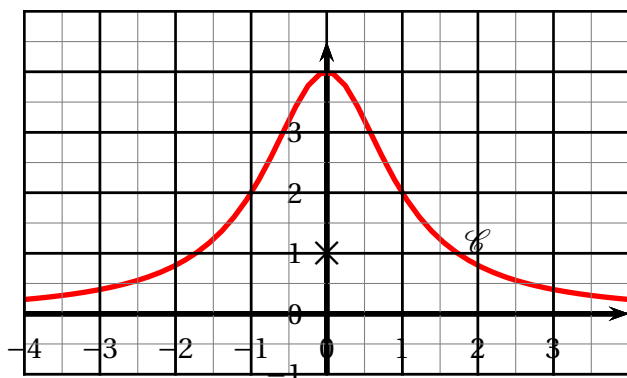
Le maximum de  $f(x)$  est 4, atteint en 0 ( $f(0) = 4$ ).

$f(-6) = f(6) = \frac{40}{37}$ . Le minimum est  $\frac{40}{37}$ , atteint en -6 et 6.

Le tableau de variation est :

$x$	-6	0	6
$f(x)$	$\frac{40}{37}$	4	$\frac{40}{37}$

**Exemple** : Voici la courbe représentative de  $f : x \mapsto \frac{4}{x^2 + 1}$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .



Le maximum est 4, atteint en 0, mais  $f$  n'a pas de minimum (0 n'est l'image d'aucun nombre).