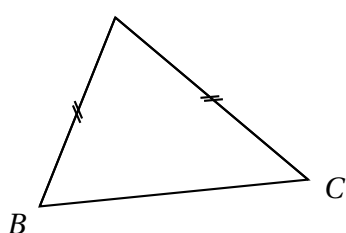


2^{nde} : correction du contrôle sur les équations et inéquations

Exercice I (2,5 points)

Un triangle isocèle a pour périmètre 234 mm. Sa base $[BC]$ mesure 24 mm de plus que chacun des côtés égaux.



- 1) On pose $AB = x$
 $BC = x + 24$.
- 2) Le périmètre vaut $\mathcal{P} = x + x + (x + 24) = 3x + 24$.
 Alors : $3x + 24 = 234$ donc $3x = 234 - 24 = 210$ d'où
 $x = \frac{210}{3} = 70$; $BC = 94 \text{ mm}$

Exercice II (5 points)

Résoudre les équations suivantes :

1) $3x + 5 = 7x - 3$

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 7x - 3 \\ 5 &= 4x - 3 \\ 8 &= 4x \\ \frac{8}{4} &= x \end{aligned}$$

L'équation $3x + 5 = 7x - 3$ a une unique solution :
 $x = 2$.

2) $(3x + 5)(7x - 3) = 0$ C'est un produit nul donc :

$$\begin{array}{ll} 3x + 5 = 0 & \text{ou} \quad 7x - 3 = 0 \\ 3x = -5 & 7x = 3 \\ x = \frac{-5}{3} & x = \frac{3}{7} \end{array}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5}{3}; \frac{3}{7} \right\}$$

3) a) $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{(2x + 5)(2x - 5)}$

b) L'équation $4x^2 - 25 - (2x - 5)(7 - x) = 0$ s'écrit alors :
 $(2x + 5)(2x - 5) - (2x - 5)(7 - x) = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (2x - 5)[(2x + 5) - (7 - x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 5)(2x + 5 - 7 + x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 5)(3x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un des facteurs est égal à 0.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{5}{2} \right\}$$

Exercice III (1,5 points)

$$\begin{aligned} 2x + 7 &\geq 12x + 3 \\ \Leftrightarrow 2x - 12x &\geq 3 - 7 \\ \Leftrightarrow -10x &\geq -4 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5} \quad (\text{l'inégalité change de sens car on} \\ &\text{divise par un nombre négatif}) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{2}{5} \right]$

Exercice IV (3 points)

Résoudre à l'aide d'un tableau de signes :
 $(5x + 7)(-2x + 5) < 0$

• Signe de $5x + 7$:

$$5x + 7 = 0 \Leftrightarrow 5x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}$$

$$5x + 7 > 0 \Leftrightarrow 5x > -7 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{5}$$

• Signe de $-2x + 5$:

$$-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$-2x + 5 > 0 \Leftrightarrow -2x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \quad \text{car on divise par un nombre négatif.}$$

• Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$5x + 7$	-	0	+	+
$-2x + 5$	+	+	0	-
$(5x + 7)(-2x + 5)$	-	0	+	-

• **Conclusion** : on veut que le produit soit strictement négatif : $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{7}{5} \right[\cup \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$

Exercice V

(4 points)

On veut résoudre l'inéquation : $\frac{x+5}{x+12} \leq 3$

1) Le dénominateur ne doit pas s'annuler, donc on doit avoir $x \neq -12$; $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-12\}$

2) On suppose que $x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x+12} \leq 3 &\Leftrightarrow \frac{x+5}{x+12} - 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+5-3(x+12)}{x+12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+5-3x-36}{x+12} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x-31}{x+12} \geq 0 \end{aligned}$$

3) On étudie le signe du numérateur et du dénominateur :

• Signe de $-2x-31$:

$$-2x-31=0 \Leftrightarrow -2x=31 \Leftrightarrow x=-\frac{31}{2}=-\frac{31}{2}.$$

$$-2x-31>0 \Leftrightarrow -2x>31 \Leftrightarrow x<-\frac{31}{2}$$

• Signe de $x+12$:

$$x+12>0 \Leftrightarrow x>-12$$

• Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{31}{2}$	-12	$+\infty$
$-2x-31$	+	$\emptyset$	-	-
$x+12$	-	-	+	+
$\frac{-2x-31}{x+12}$	-	$\emptyset$	+	-

4) On veut que le quotient soit inférieur ou égal à 0 :

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{31}{2} \right] \cup]-12; +\infty[$$

Exercice VI

(4 points)

Soit l'expression :

$$E(x) : (3x-4)^2 - (2x-5)^2 \text{ (Forme 1).}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) } (3x-4)^2 - (2x-5)^2 &= [(3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2] - [(2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2] \\ &= (9x^2 - 24x + 16) - (4x^2 - 20x + 25) \\ &= 9x^2 - 24x + 16 - 4x^2 + 20x - 25 = \boxed{5x^2 - 4x - 9} \end{aligned}$$

(forme 2)

b) On reconnaît une différence de deux carrés :

$$\begin{aligned} (3x-4)^2 - (2x-5)^2 &= [(3x-4) + (2x-5)][(3x-4) - (2x-5)] \\ &= (3x-4+2x-5)(3x-4-2x+5) = \boxed{(5x-9)(x+1)} \end{aligned}$$

(forme 3)

2) À l'aide de la forme la plus appropriée, résoudre les équations suivantes :

a) $E(x) = 0 \Leftrightarrow (5x-9)(x+1) = 0$ en prenant la forme 3

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un des facteurs est nul.

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{9}{5} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E(x) = -9 &\Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 9 = -9 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(5x-4) = 0. \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{4}{5} \right\}$$

Question facultative (2 points) :

$$E(x) = (2x-5)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (5x-9)(x+1) = (2x-5)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (5x-9)(x+1) - (2x-5)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(5x-9-(2x-5)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(5x-9-2x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x-4) = 0.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{4}{3} \right\}$$