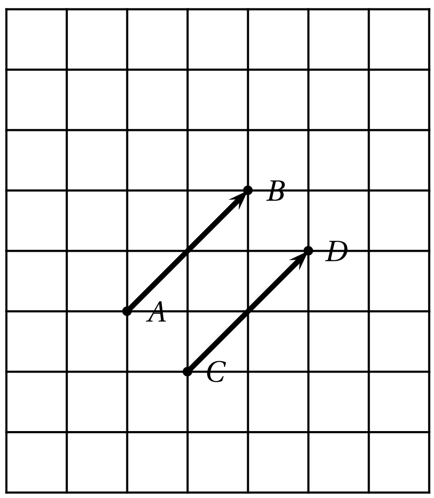
2^{nde} : corrigé du contrôle (milieu d'un segment, longueurs, vecteurs)

Dans tout le sujet, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,I\,;\,J)$.

Exercice I (1 point)

On considère les points A, B et C représentés ci-dessous.
Voir figure.



Exercice II (2 points)

On donne les points $A(2\,;\,3)$ et $B(-1\,;\,-4)$.
Soit M le milieu de $[AB]$.

- $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+3}{2} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Les coordonnées de M sont $\boxed{M\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)}$.

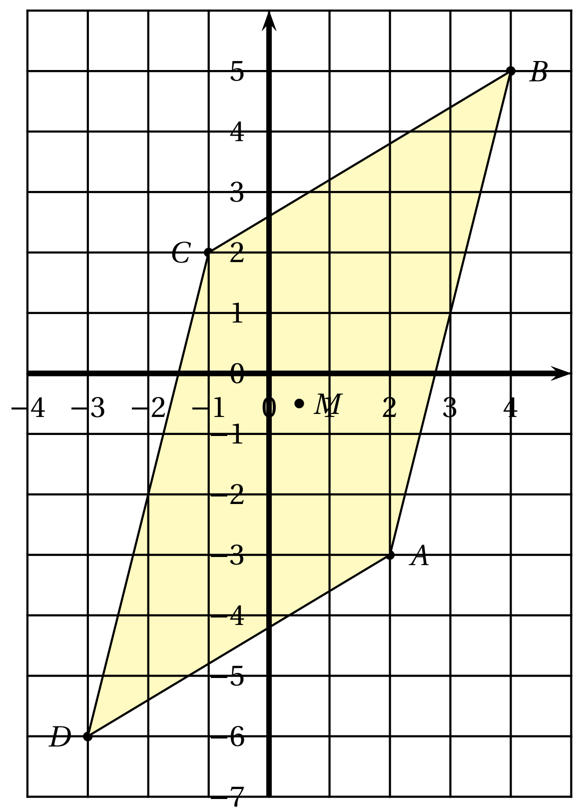
Exercice III (3 points)

Soient $A(2\,;\,-3)$, $B(4\,;\,5)$ et $C(-1\,;\,2)$.
$ABCD$ est un parallélogramme si ses diagonales ont le même milieu.

- Soit M le milieu de $[AC]$.
  $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$
  $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-3+2}{2} = -\dfrac{1}{2}$.
  Les coordonnées de M sont $\boxed{M\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)}$.
- M doit être le milieu de l'autre diagonale $[BD]$. Alors :

$x_M = \dfrac{x_B x_D}{2}$ donc $2x_M = x_B + x_D$ d'où
$x_D = 2x_M - x_B = 2 \times \dfrac{1}{2} - 4 = 1 - 4 = -3$.
$y_M = \dfrac{y_B y_D}{2}$ donc $2y_M = y_B + y_D$ d'où
$y_D = 2y_M - y_B = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 5 = -1 - 5 = -6$. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, l faut que les coordonnées de D soient $\boxed{D(-3\,;\,-6)}$.

Figure (non demandée).'



Exercice IV (2 points)

On donne les points $C(-1\,;\,-3)$ et $D(3\,;\,1)$.
$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + \left(y_D - y_C\right)^2} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-(-3))^2}$
$= \sqrt{4^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$

Exercice V (4,5 points)

On considère les points A (1 ; -1), B (-2 ; 0), C (0 ; 6) et D (3 ; 5).

1. $M\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_C}{2}\right) = \boxed{\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)}$.

2. $M'\left(\dfrac{x_B+x_D}{2}\ ;\ \dfrac{y_B+y_D}{2}\right)=\boxed{\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)}$.
3. M et M' ont les même coordonnées donc $M = M'$.
   Les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu : c'est un **parallélogramme**.

Exercice VI (4 points)

On considère les points $A(3\ ;\ 4)$, $B(-2\ ;\ 3)$ et $C(4\ ;\ -2)$.

1.
   - $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$
     $=\sqrt{(-2-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}$
     $=\sqrt{25+1}=\boxed{\sqrt{26}}$
   - $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}$
     $=\sqrt{(4-(-2))^2+(-2-3)^2}=\sqrt{6^2+(-5)^2}$
     $=\sqrt{36+25}=\boxed{\sqrt{61}}$
   - $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}$
     $=\sqrt{(4-3)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{1^2+(-6)^2}$
     $=\sqrt{1+36}=\boxed{\sqrt{37}}$
2. Le plus grand côté est $BC=\sqrt{61}$.
   - $BC^2=61$
   - $AB^2+AC^2=26+37=63$.
   - $BC^2\neq AB^2+AC^2$.
     D'après la contraposée du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle.

Exercice VII (3,5 points)

Soient A, B, C et D quatre points du plan (voir figure).

a) On doit avoir $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DC}$
b) On doit avoir $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BC}$
c) On doit avoir $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BA}$