2nde : correction du TD6 (milieux, distances)

Exercice I

On considère les points $A(1\,;\,3)$, $B(7\,;\,2)$, $C(4\,;\,-2)$ et $D(-2\,;\,-1)$.

1. Soit M le milieu de $[AC]$:

   - $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+(-2)}{2} = \dfrac{1}{2}$.
     $\boxed{M\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$
   - Soit M' le milieu de $[BD]$.
     $x_{M'} = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{7+(-2)}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_{M'} = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$
     $\boxed{M'\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$.

2. Les deux points ont les mêmes coordonnées donc $M = M'$.
   Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : $ABCD$ est une parallélogramme.

Exercice II

On considère les points $A(-1\,;\,2)$ et $B(4\,;\,3)$.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-(-1))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$; $\boxed{AB = \sqrt{26}}$

Exercice III

On considère les points $A(1\,;\,-1)$, $B(8\,;\,4)$ et $M(2\,;\,5)$.

1. - $MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = \boxed{\sqrt{37}}$.
   - $MB = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + \left(y_M - y_B\right)^2} = \sqrt{(2-8)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{6^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{37}}$.
2. $MA = MB$ donc M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice IV

On considère les points $A(-2\,;\,3)$, $B(3\,;\,4)$, $C(3\,;\,-2)$ et $M(1\,;\,1)$.

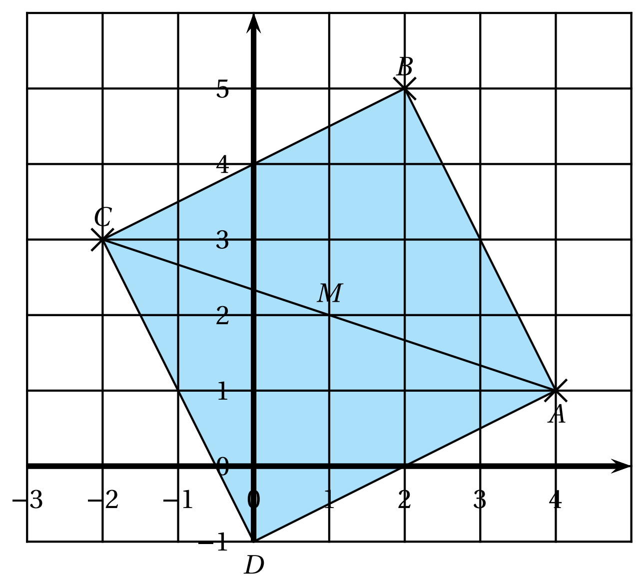
- $MA == \sqrt{(-2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$
- $MB = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{13}}$
- $MC = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$.
- On constate que $MA = MB = MC = \sqrt{13}$.
  A, B et C appartiennent au cercle de centre M et de rayon $\sqrt{13}$.

Exercice V

On considère les points $A(4;1)$, $B(2;5)$, $C(-2;3)$.

1. - Soit M le milieu de $[AC]$.
     $M\left(\dfrac{4+(-2)}{2}\,;\,\dfrac{1+3}{2}\right)$ donc $\boxed{M(1\,;\,2)}$.
   - Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, M doit être le milieu de BD.
     Notons x_D et y_D les coordonnées de D.
     On doit avoir :
     - $x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ donc $x_D = 2x_M - x_B = 2\times 1 - 2 = 0$
     - $y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2}$ donc $y_D = 2y_M - y_B = 2\times 2 - 5 = -1$

     Le point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme est $\boxed{D(0\,;\,-1)}$



2. - $AB = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $\boxed{AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$
   - $BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
3. $ABCD$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur : c'est un losange.
4. - $AC = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$
   - $AC^2 = 40$; $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40$
   - $AC^2 = AB^2 + BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
5. $ABCD$ est un losange avec un angle droit : c'est un carré.