2^nde : correction du TD n° 4 (généralités sur les fonctions)

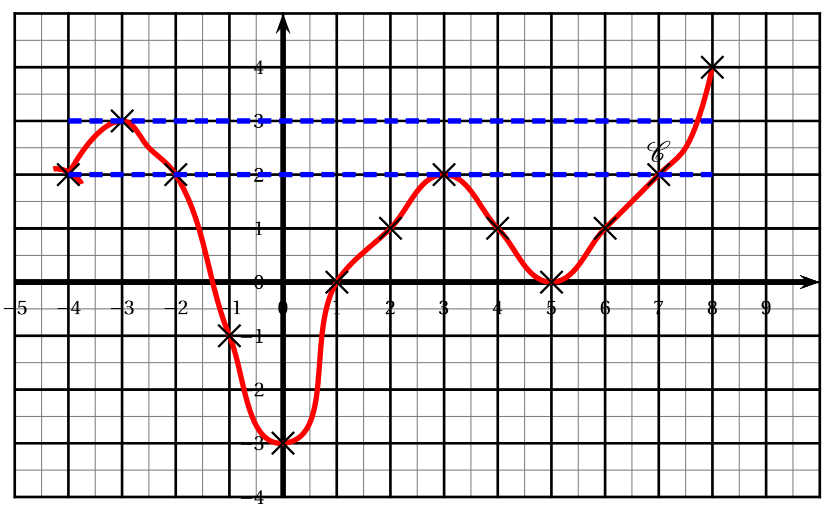
Exercice I

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;\,5]$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$.

1. L'image de 0 par la fonction f est $f(0) = \dfrac{0+3}{0+5} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$.
2. • $f(-3) = \dfrac{-3+3}{-3+5} = \boxed{0}$
   • $f(5) = \dfrac{5+3}{5+5} = \dfrac{8}{10} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$
3. $f(4) = \dfrac{7}{9} \approx 0,77777777777777\cdots \neq 0,777$ donc $\boxed{A \notin \mathscr{C}}$.
   Autre méthode : $\dfrac{7}{9} = 0,777$ équivaut à $7 = 9 \times 0,777$ qui est impossible, car $9 \times 0,777$ est un nombre décimal qui se termine par un 3 (car 79=63)
4. Un antécédent de -1 est un nombre x vérifiant $f(x) = -1$.
   $f(x) = -1$ équivaut à $\dfrac{x+3}{x+5} = -1$ donc $x+3 = -(x+5)$ qui donne :
   $x+3 = -x-5$ donc $2x = -8$, soit $x = -4$.
   L'antécédent de -1 par f est $\boxed{-4}$.

Exercice II

Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}$, représentative d'une fonction f.
Les points marqués par une croix sont à coordonnées entières.

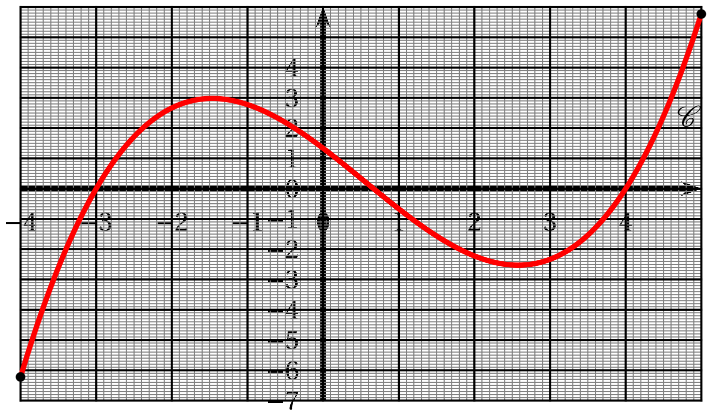


1. L'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D} = [-4\,;\,8]}$.
2. $\boxed{f(-1) = -1}$; $\boxed{f(3) = 2}$; $\boxed{f(6) = 1}$.
3. Les antécédents de 2,5 sont -3,7 ; -2,5 et 7,5.
4. Le maximum de f sur $\mathscr{D}$ est $\boxed{4}$, atteint pour $\boxed{x = 8}$.
5. Le minimum de f sur $\mathscr{D}$ est $\boxed{-3}$, atteint pour $\boxed{x = 0}$.
6. On cherche les abscisses des points de la courbe ayant une ordonnée égale à 3.
   Les solutions sont -3 et 7,7 environ. $\boxed{\mathscr{S} = \{-3\,;\,7,7\}}$.
7. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) < 0$ a pour solutions : $\boxed{\mathscr{S} =]-0,7\,;\,1[}$.
   (b) $f(x) \leqslant 2$.
   On cherche les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée y vérifie $y \leqslant 2$.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{-4\} \cup [-2\,;\,7]}$
   (c) $f(x) > 1$: $\boxed{\mathscr{S} = [-4\,;\,-1,6[\cup]2\,;\,4[\cup]6\,;\,8]}$.
8. Tableau de variations de la fonction f :

x	-4		-3		0		3		5		8
$f(x)$	2	↗	3	↘	-3	↗	2	↘	0	↗	4

Exercice III

Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}$, représentative d'une fonction f.



1. L'ensemble de définition de f est $\boxed{\mathscr{D} = [-4\,;\,5]}$.
2. • $\boxed{f(-4) \approx -6,2}$.
   • $\boxed{f(-2) \approx 2,7}$
   • $\boxed{f(1) \approx -0,7}$
   • $\boxed{f(4) = 0}$
3. Les antécédents de 0 sont -3 ; -0,7 et 4.
4. 1 a trois antécédents par f : ce sont : -2,7 ; 0,2 et 4,3 (valeurs approchées)
5. L'antécédent de 4 est environ 4,7.
6. Sur $[-4\,;\,0]$, le maximum de f est environ 3.
7. Sur $[0\,;\,5]$, le maximum de f est environ 5,8.
8. Sur $[0;5]$, le minimum de f est environ -2,5.

Exercice IV

Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	-12		0		4		16
$f(x)$	4	↘	-3	↗	11	↘	6

1. L'image de 4 est 11.
2. -5 n'a aucun antécédent par f puisque le minimum de f est -3.
3. 2 a deux antécédents, un entre -12 et 0, l'autre entre 0 et 4.
4. Comparer lorsque c'est possible en justifiant :

   (a) $f(-5)$ et $f(5)$.

   $-5 \in [-12\,;\,0]$ et f est **décroissante** sur cet intervalle, donc $\boxed{f(-5) \leqslant 4}$.
   $5 \in [4\,;\,16]$ et f est **décroissante** sur cet intervalle, donc $\boxed{f(5) \geqslant 6}$.

   On en déduit que $\boxed{f(-5) < f(5)}$.

   (b) 1 et 2 appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,4]$; $1 < 2$ et f est **croissante** sur cet intervalle, donc $\boxed{f(1) \leqslant f(2)}$.