2^{nde} : correction duTD n° 29

Exercice I

Un club propose deux types d'activité : le sport en compétition et le sport en loisir.
Des tarifs différents sont proposés selon que l'on est adulte (plus de 18 ans) ou jeune.
Le nombre d'adhérents du club est 900 et on sait que :

- 567 ont choisi le sport-loisir et parmi eux 234 sont adultes.
- 270 jeunes ont choisi la compétition.

1. On obtient le tableau ci-dessous,

	Sport-loisir	Compétition	Total
Adultes	234	63	297
Jeunes	333	270	603
Total	567	333	900

2. On choisit un adhérent du club et on appelle C l'évènement :« l'adhérent a choisi la compétition » et A l'événement : « L'adhérent est un adulte ».
   (a) L'univers est l'ensemble des adhérents.
   il y a donc **équiprobabilité** des issues, chaque adhérent à une probabilité $\dfrac{1}{900}$ d'être choisi.
   (b) • $p(A)=\dfrac{297}{900}=\boxed{\dfrac{33}{100}}$
   • $p(C)=\dfrac{333}{900}=\boxed{\dfrac{111}{300}}$
   (c) • $\overline{A}$ est « l'adhérent n'est pas un adulte »
   • $A\cap C$ est l'événement : « l'adhérent est un adulte **et** il a choisi la compétition »
   • $A\cup C$ est l'événement : « l'adhérent est un adulte **ou** il a choisi la compétition »
   (d) • $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)=\boxed{\dfrac{67}{100}}$
   • $p(A\cap C)=\dfrac{63}{900}=\boxed{\dfrac{7}{100}}$
   • $p(A\cup C)=\dfrac{63}{900}=\dfrac{7}{100}=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\boxed{\dfrac{567}{900}}$
3. On choisit un adhérent parmi les adultes. La probabilité p_1 qu'il ait choisi la compétition est :
   $p_1=\dfrac{63}{297}=\boxed{\dfrac{7}{33}}$
4. On choisit un adhérent parmi ceux qui ont choisi la compétition. La probabilité p_2 qu'il s'agisse d'un adulte est :
   $p_2=\dfrac{63}{333}=\boxed{\dfrac{21}{111}}$

Exercice II Brevet blanc (collège de Conakry en Guinée)

$$A=\dfrac{9^{n+1}+9^n}{3^{2n+1}-3^{2n}}=\dfrac{9^n(9+1)}{3^{2n}(3-1)}=\dfrac{9^n\times 10}{9^n\times 2}=\boxed{5}$$

Exercice III Brevet blanc (collège de Conakry en Guinée)

Soient $U=x-2\sqrt{6}$ et $V=x+2\sqrt{6}$.
U et V sont inverses si, et seulement si, $UV=1$.

$UV=1\iff\left(x-2\sqrt{6}\right)^2\left(x+2\sqrt{6}\right)^2=1$
$\iff x^2-24=1\iff x=25\iff x=\pm 5$.
Les deux nombres possibles sont -5 et 5.

Exercice IV

1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

2) $x^2+14x+49=0\iff(x+7)^2=0\iff x=-7$; $\boxed{\mathscr{S}=\{-7\}}$

Exercice V

On veut résoudre l'équation $x^2+5x+6=0$.

1) x^2+5x+6 n'a ni facteur commun et ce n'est pas une identité remarquable.

2) $a^2+2ab=(a+b)^2--b^2$

Compléter alors : $x^2+5x=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\boxed{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}$.

3) $x^2+5x+6=0 \iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=0 \iff \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$

4) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]=\boxed{(x+2)(x+3)}$

5) $x^2+5x+6=0 \iff (x+2)(x+3)=0$; $\boxed{\mathscr{S}=\{-3\,;\,-2\}}$

Exercice VI

$x^2+3x+12=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+12=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+12=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{39}{4}=0$.

Cette somme est strictement positive donc ne peut s'annuler; $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$

Exercice VII

On considère le nombre $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

1) $7-4\sqrt{3}<7+4\sqrt{3}$ donc $\sqrt{7-4\sqrt{3}}<\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ donc $A<0$.

2) $A^2=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2=\sqrt{7-4\sqrt{3}}^2-2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\times\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}^2$

$=7-4\sqrt{3}-2\sqrt{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)}+7+4\sqrt{3}$

$=14-2\sqrt{49-48}=14-2\sqrt{1}=14-2=\boxed{12}$.

Alors : $A=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$.

Comme A est négatif, on a : $\boxed{A=-2\sqrt{3}}$

Remarque : $7+4\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}+3=2^2+2\times2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$

$=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ donc $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\boxed{2+\sqrt{3}}$

De même : $7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ donc $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

Alors : $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)$

$=2-\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}=\boxed{-2\sqrt{3}}$

Exercice VIII

On considère le nombre $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

.

Une élève a tapé ce nombre sur sa calculatrice et obtient comme résultat : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Ce sont deux nombres positifs : comparons leurs carrés!

- $A^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=\boxed{2+\sqrt{3}}$
- $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4}=\frac{\sqrt{6}^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{4}$
  $=\frac{6+2\sqrt{12}+4}{4}=\frac{8+2\times\sqrt{2^2\times3}}{4}=\frac{8+2\times2\sqrt{3}}{4}$
  $=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=\frac{\cancel{4}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}}=\boxed{2+\sqrt{3}}$.
  Deux nombres positifs qui ont le même carré sont égaux, donc : $\boxed{A=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$