Correction de la feuille d'exercices : accompagnement personnalisé sur les vecteurs (séance du 23/04)

Exercice I

On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs :

a) $3\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\times 2\\3\times(-5)\end{pmatrix}$ donc $\boxed{3\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}6\\-15\end{pmatrix}}$

b) $\boxed{-5\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-5\\-15\end{pmatrix}}$

c) $\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}}$

d) $2\overrightarrow{u}-7\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\times 2-7\times 0\\2\times(-5)-7\times(-6)\end{pmatrix}$ donc $\boxed{2\overrightarrow{u}-7\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\32\end{pmatrix}}$

Exercice II

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$.

$\begin{cases}-12=-3\times 4\\21=-3\times(-7)\end{cases}$ donc $\overrightarrow{v}=-3\overrightarrow{u}$; ces vecteurs sont colinéaires.

On peut aussi calculer le déterminant :

$\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}4 & -12\\-7 & 21\end{vmatrix}=4\times 21-(-7)\times(-12)$

$=84-84=\boxed{0}$ donc ces vecteurs sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}15\\-7\end{pmatrix}$.

$\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}5 & 15\\-2 & -7\end{vmatrix}=5\times(-7)-(-2)\times 15$

$=-35+30=-5\neq 0$.

Leur déterminant est non nul : ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice III

On considère les points ts $A(-1\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 2)$, $C(-2\ ;\ -3)$, $D(6\ ;\ -1)$ et $E(5\ ;\ 0)$.

1.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$
   - $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.
   - Il est clair que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3.
   - $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
   - On voit que $\overrightarrow{EB}=-2\overrightarrow{ED}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
4. On en déduit que les droites (EB) et (ED) sont parallèles. Comme elles ont un point commun, elles sont confondues donc les points E, B et D sont alignés.

Exercice IV

On considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1-2\sqrt{3}\\\sqrt{3}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-3-\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

$\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix}1-2\sqrt{3} & \sqrt{3}\\\sqrt{3}+\sqrt{2} & -3-\sqrt{6}\end{vmatrix}$

$=\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(-3-\sqrt{6}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\sqrt{3}$

$=-3-\sqrt{6}+6\sqrt{3}+2\sqrt{18}-3-\sqrt{6}$

$=-6-2\sqrt{6}+6\sqrt{3}+2\sqrt{18}$

$=-6-2\sqrt{6}+6\sqrt{3}+2\times 3\sqrt{2}$

$=-6-2\sqrt{6}+6\sqrt{3}+6\sqrt{2}\neq 0$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice V

Soient $A(-5\ ;\ -1)$, $B(1,0)$ et $C(19\ ;\ 3)$.

1) $\overrightarrow{AB}(6\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}24\\4\end{pmatrix}$

2) $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}6 & 24\\1 & 4\end{vmatrix}=6\times 4-1\times 24=\boxed{0}$.

3) $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
Ils ont un point commun donc les trois points A, B et C sont alignés.