2$^{\text{nde}}$: AP : séance du 30/01

Exercice I

Pour chaque question, il est demandé d'indiquer la lettre correspondant à l'unique réponse exacte.

1. Soient x et y deux réels non nuls. Quelle expression est égale à $\dfrac{x+y}{y}$?

   (a) $\dfrac{x}{y}+y$ (b) $\dfrac{x}{y}+1$ (c) $\dfrac{y}{x}+1$ (d) $xy+1$ (e) $x+1$

   $\dfrac{x+y}{y}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{y}=\dfrac{x}{y}+1$ (réponse (b)).

2. Soient a et b deux réels non nuls. Quelle est l'expression égale à $\dfrac{-5a^2b^2}{15b^3a^2}$?

   (a) $\dfrac{1}{3b}$ (b) $\dfrac{a}{3b}$ (c) $-\dfrac{b}{3}$ (d) $-\dfrac{1}{3b}$ (e) $-\dfrac{3}{b}$

   $\dfrac{-5a^2b^2}{15b^3a^2}=\dfrac{-\cancel{5}\cancel{a^2}\times\cancel{b^2}}{3\times\cancel{5}\times\cancel{b^2}\times b\times\cancel{a^2}}=-\dfrac{1}{3b}$ (fréponse (D)).

3. Soient a, b, x et y quatre réels strictement positifs. Quel est le quotient égal à la somme de $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{x}{y}$?

   (a) $\dfrac{ax}{by}$ (b) $\dfrac{a+x}{b+y}$ (c) $\dfrac{ay+bx}{by}$ (d) $\dfrac{a+y}{b+x}$ (e) $\dfrac{by}{ay+bx}$

   $\dfrac{a}{b}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{ay+bx}{by}$ (réponse (c))

4. Soient a et b deux réels non nuls. Quelle est la moitié de $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$?

   (a) $\dfrac{a+b}{2}$ (b) $\dfrac{1}{a+b}$ (c) $\dfrac{2}{a+b}$ (d) $\dfrac{a+b}{2ab}$ (e) $\dfrac{2(a+b)}{ab}$

   La moitié de $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ est $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\dfrac{\frac{a+b}{ab}}{2}=\dfrac{a+b}{ab}\times\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{a+b}{2ab}}$ (réponse (d))

5. Soient a et b deux réels. Quelle est l'expression égale à la différence $(a+b)^2-(a-b)^2$?

   (a) $2a^2+2b^2$ (b) $4ab$ (c) $2ab$ (d) 0 (e) a^2+b^2

   $(a+b)^2-(a-b)^2=\left[a^2+2ab+b^2\right]-\left[a^2-2ab+b^2\right]=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=\boxed{4ab}$ (réponse (b))

Exercice II

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. $t+u=5$ si, et seulement si, $t=2$ et $u=3$.
   FAUX!
   Si $t=2$ et $u=3$, $t+u=5$ mais **la réciproque est fausse**; par exemple si $t=1$ et $u=4$, $t+u=5$.
   En fait : $t+u=5$ équivaut à $u=5-t$ donc tous les couples de la forme $(t\,;\ u=5-t)$, $t\in\mathbb{R}$ conviennent.
2. L'égalité $(a+b)^2=a^2+b^2$ est toujours vraie.
   FAUX!
   Par exemple : si $a=3$ et $b=4$, $(a+b)^2=(3+4)^2=7^2=49$ mais $a^2+b^2=3^2+4^2=9+16=25$
   En fait : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ donc, pour que $(a+b)^2=a^2+b^2$, il faut que $2ab=0$ donc il faut avoir $a=0$ ou $b=0$.

3. Il existe des réels a et b tels que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
   VRAI! (Voir remarque ci-dessus) ; par exemple $a = 3$ et $b = 0$.
4. L'équation $x^2 = -4$ n'admet pas de solution.
   VRAI!
   En effet : $x^2 \geqslant 0$ et $-4 < 0$ donc il ne peut pas y avoir égalité.
5. $y^2 = 2y$ si, et seulement si, $y = 2$.
   FAUX!
   $y^2 = 2y$ donne $y^2 - 2y = 0$ qui s'écrit, après factorisation : $\boxed{y(y-2) = 0}$.
   On voit que $y = 0$ est aussi une solution de cette équation.
6. $z^2 = 16$ si,et seulement si , $z = 4$.
   FAUX!
   $z^2 = 16$ s'écrit $z^2 - 16 = 0$ donc $z^2 - 4^2 = 0$ qui donne $(z-4)(z+4)$=0.
   On voit qu'il y a deux solutions : -4 et 4.
7. Pour tout réel b, je peux calculer $\dfrac{b^2+1}{b-4}$.
   FAUX!
   On ne peut pas diviser par 0, donc il faut que $\boxed{b \neq 4}$.
8. Il existe un réel dont l'inverse est égal à l'opposé.
   FAUX!
   On cherche $x \neq 0$ tel que $\dfrac{1}{x} = -x$ qui donne $1 = -x^2$.
   $1 > 0$ et $-x^2 < 0$ donc il ne peut pas y avoir égalité.

Exercice III

a) Trouver deux réels solutions de l'équation $x^2 - 3x = 0$.
   On factorise : on doit a voir $x(x-3) = 0$ donc $\boxed{x = 0}$ ou $\boxed{x = 3}$.

b) Développer et réduire l'expression $(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)$.
   $(a-1)(a+1)\left(a^2+1\right) = [(a-1)(a+1)]\left(a^2+1\right) = \left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right) = \left(a^2\right)^2 - 1^2 = \boxed{a^4 - 1}$

c) Calculer et simplifier $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{7} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{11}$
   $\dfrac{2}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \times \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \times \dfrac{\cancel{7}}{11} = \boxed{\dfrac{2}{11}}$

d) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$?
   On ne peut calculer la racine carrée que d'un nombre positif, donc on doit avoir $x - 3 \geqslant 0$ donc $x \geqslant 3$:
   $\boxed{\mathscr{D} = [3\,;\,+\infty[}$.

e) De quel(s) réel(s) ne peut-on pas calculer l'image par $g : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2x-3}$?
   Il faut que $2x - 3 \neq 0$; or, $2x - 3 = 0$ donne $x = \dfrac{3}{2}$.
   $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$.

f) Sachant que la courbe représentative de $f : x \mapsto x^2 + dx + 3$ passe par le point M(1 ; 6), quelle est la valeur de la constante d?
   On doit avoir $f(1) = 6$ donc $1^2 + d \times 1 + 3 = 6$ donc $4 + d = 6$ d'où $\boxed{d = 2}$