Différents ensembles de nombres et intervalles

Table des matières

I Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels

Définition

On appelle nombre entier **naturel** un nombre entier positif ou nul; les entiers naturels sont les nombres servant à compter les objets (0 n'a été considéré comme nombre que tardivement).
L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3 \cdots\}$

Remarque : le symbole 0 a été utilisé par les Babyloniens (il y a plus de 2000 ans, les Mayas, les Indiens; il signifiait l'absence d'unité dans la numération de position (celle que nous utilisons) pour indiquer l'absence d'une unité; dans l'utilisations des chiffres romains (notation de juxtaposition), le symbole 0 n'existe pas. 0 est apparu en Occident grâce aux arabes, notamment par la traduction de textes arabes par le mathématicien Al-Kwarismi.
Pour les curieux : cliquer ici : Histoire du nombre zéro.

II Ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs

Définition

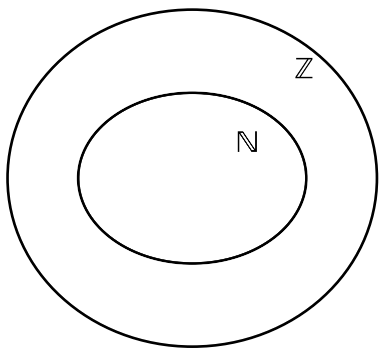
Un entier relatif est un nombre entier positif ou négatif ou nul.
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.
C'est l'ensemble des entiers naturels auquel on adjoint leur opposés.
$\mathbb{Z} = \{\cdots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 \cdots\}$.
Remarque : Z est l'initiale du mot allemand Zahl qui veut dire nombre.

Tous les entiers relatifs sont naturels ; l'ensemble des entiers naturels est **inclus** dans celui des entiers relatifs ; on écrit $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}}$.

Remarques de notation.

- 6 est un nombre naturel. on écrit $\boxed{6 \in \mathbb{N}}$. (On lit « 6 appartient à $\mathbb{N}$ »)
- 6 est aussi un entier relatif ; on écrit $\boxed{6 \in \mathbb{Z}}$. (« 6 appartient à $\mathbb{Z}$ »)
- -3 est un entier relatif : on écrit $\boxed{-3 \in \mathbb{Z}}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$ (-3 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels).
- 7,2 n'est pas un entier naturel : on écrit $\boxed{7,2 \notin \mathbb{N}}$.

Schématiquement :



⚠ : Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$.
Un ensemble est inclus dans un ensemble qui le contient ; un ensemble est constitué d'éléments ; chaque élément de cet ensemble appartient à cet ensemble.
$A \subset B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent à B, mais il peut y avoir des éléments de B qui ne sont pas dans A.
Remarque : Si $A \subset B$ et $B \subset A$ équivaut à dire que $A = B$ (ce sont les mêmes ensembles)

Exemples :

1. une classe de seconde notée A est constituée de deux sous-ensembles, l'ensemble des garçons de la classe, noté G et l'ensemble des filles, noté F. Hugo (noté H est un garçon de la classe)
   On a $G \subset A$, $F \subset A$, $H \in G$, $H \in A$, $H \notin F$.
2. Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres entiers naturels pairs.
   On écrit : $2 \in \mathbb{P}$ (se lit « 2 appartient à $\mathbb{P}$ ») et $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ (se lit « $\mathbb{P}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ »)

III Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition

Un nombre x est décimal s'il peut d'écrire comme le quotient d'un nombre entier par une puissance de 10 ; $x = \dfrac{a}{10^k}$.
Il peut s'écrire sous forme décimale avec un nombre **fini** de chiffres.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :

- $7,121 = \dfrac{7\,121}{1\,000} = \dfrac{7\,121}{10^3}$ donc 7,121 est un nombre décimal.
- $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
  Justification : si $\dfrac{1}{3}$ était décimal, il existait k tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^k}$ donc $3a = 10^k$ ce qui est impossible car 3 ne divise jamais 10^k.
  Autre justification : $\dfrac{1}{3} = 0,3333\cdots$ avec une infinité de 3 après la virgule (et il n'y a pas d'autre écriture possible), donc $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

⚠ : Ce n'est pas parce que l'écriture d'un nombre contient une infinité de décimales que celui-ci n'est pas décimal.
Exemple : le nombre $0,999\,999\cdots$ est égal à 1, car $0,333\,333\cdots = \dfrac{1}{3}$ donc $0,999\,999\cdots = 3 \times \dfrac{1}{3} = 1$

IV Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Définition

a est un nombre rationnel s'il peut d'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs, q non nul.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. (Q pour quotients)

Exemples :

- $\dfrac{2}{3}$ est rationnel
- $2,33 = \dfrac{233}{100}$ donc 2,33 est rationnel.
- $\sqrt{2}$ ou π ne sont pas des nombres rationnels.

Propriété (admise)

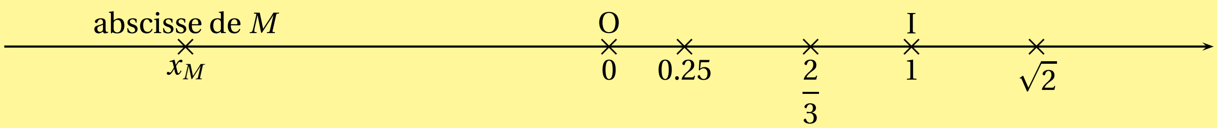
Tout nombre rationnel r a une forme irréductible **unique**, c'est-à-dire qu'il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b tel que $r = \dfrac{a}{b}$ et tels que le seul diviseur commun à a et b soit 1 (on dit que a et b sont premiers entre eux).

V Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

Nous avons vu qu'il existait des nombres qui n'étaient pas rationnels.
L'irrationnalité de $\sqrt{2}$ démontrée par les Pythagoriciens ont entraîné la première crise de l'histoire des mathématiques (voir par exemple ici). D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$; pour les grecs, tout dans la nature est **mesurable**, mais les grecs ne conçoivent que les nombres entiers et les nombres rationnels (comme notion de partage). Or, ils ont montré que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel, donc ont trouvé une longueur non mesurable avec les nombres qu'ils connaissaient…
Remarque : ils n'ont pas su régler le problème !
Anecdote : Hippase de Métaponte, aurait été noyé en mer pour avoir divulgué l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Définition

On considère une droite, munie d'un repère $(O\ ;\ I)$.



L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée droite numérique (ou droite des réels).
À chaque point correspond un nombre unique (son abscisse) et à chaque nombre correspond un point unique.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

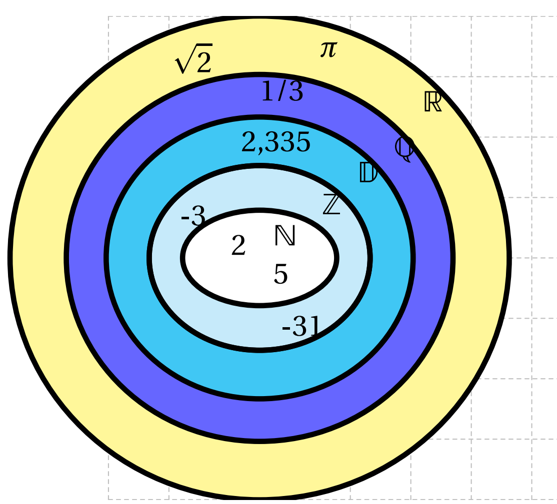
Exemples :

- Tous les nombres que vous connaissez sont des nombres réels.
- π, $\sqrt{2}$ sont des nombres réels, mais ils ne sont pas rationnels

Résumé sur les différents ensembles de nombres :
Nous avons les inclusions (strictes) suivantes :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Schématiquement :



VI Rappels sur les inégalités

Rappel :

$<$ signifie « est strictement inférieur à »

$>$ signifie « est strictement supérieur à »

$\leqslant$ signifie « est inférieur **ou égal** à »

$\geqslant$ signifie « est supérieur **ou égal** à »

Exemples :

- $2 < 7$ est vrai
- $7 < 7$ est faux
- $2 \leqslant 7$ est vrai
- $7 \leqslant 7$ est vrai
- $5 \geqslant 5$ est vrai car $5 = 5$
- $7 > 2$ est vrai

VII Intervalles finis de $\mathbb{R}$

VII.1 Intervalles fermés

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est un intervalle, noté $[a\ ;\ b]$. a et b sont les bornes de cet intervalle.

On le représente en rouge sur la droite réelle de la façon suivante :

Cet ensemble est un intervalle de $\mathbb{R}$. a et b sont ses bornes. Cet intervalle contient ses bornes. On dit qu'il est fermé.

VII.2 Intervalles semi-ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle, noté $]a\ ;\ b]$. a et b sont les bornes.

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est un intervalle, noté $[a\ ;\ b[$. a et b sont les bornes.

VII.3 Intervalles ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est un intervalle, noté $]a\,;\,b[$. a et b sont les bornes.

VIII Intervalles infinis de $\mathbb{R}$

VIII.1 Intervalle illimité à droite

Définition

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a\,;\,+\infty[$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est un intervalle, noté $[a\,;\,+\infty[$.

Remarque : Le symbole ∞ , qui se lit « infini » a été inventé par le mathématicien John Wallis (1616-1703). **Ce n'est pas un nombre réel**.

VIII.2 Intervalles illimités à droite

Définition

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a\,;\,+\infty[$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est un intervalle, noté $[a\,;\,+\infty[$.

Définition

L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est un intervalle, noté $]-\infty\ ;\ a[$.
L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$ est un intervalle, noté $[-\infty\ ;\ +a]$.

Remarques :

- Le crochet est fermé, tourné vers l'intérieur, si l'on garde le nombre et ouvert, vers l'extérieur, si l'on rejette le nombre.
- ∞ n'est pas un nombre réel, donc le crochet du côté de l'infini est **toujours** tourné vers l'extérieur.

IX Réunion et intersection de deux intervalles

Définition

Soient Iet J deux intervalles.

1. L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé l'intersection de I et J. Cet ensemble est noté $I \cap J$.
2. L'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J est appelé la réunion de I et J. Cet ensemble est noté $I \cup J$.

Exemples :

$[4\ ;\ 5] \cap [2\ ;\ 3] = \emptyset$

$[2\ ;\ 5] \cap [2\ ;\ 3] = [2\ ;\ 3]$

$[4\ ;\ 7] \cap [6\ ;\ 8] = [6\ ;\ 7]$

$[4\ ;\ 7] \cup [6\ ;\ 8] = [4\ ;\ 8]$

X Liens vers des videos

- Résumé du cours sur les intervalles : cliquer ici
- Intersection : cliquer ici
- Réunion : cliquer ici