Vecteurs (deuxième partie)

Table des matières

I Multiplication d'un vecteur par un réel

Rappel

La norme (« longueur ») d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $||\overrightarrow{u}||$.

Remarque : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

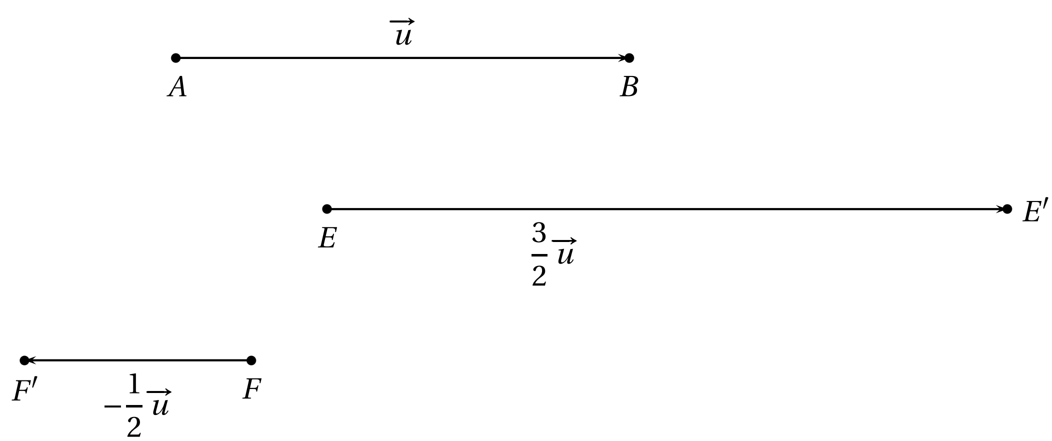
Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et soir k un réel non nul.

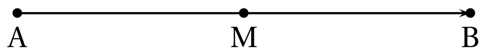
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$, $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens. Si $k < 0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La norme de $k\overrightarrow{u}$ est $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.
  $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Exemple :



Remarque : si M est le milieu d'un segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Propriétés

Pour tous réels k et k', pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

II Colinéarité de deux vecteurs

II.1 Définition

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque : deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

II.2 Caractérisation par les coordonnées

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On appelle **déterminant** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le nombre $\det\left(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v}\right) = x'y - x'y$.
Remarque : les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Propriété

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j}\right)$, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det\left(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v}\right) = 0$.

Exemple : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 14 \\ 35 \end{pmatrix}$.
$\det\left(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v}\right) = 2 \times 35 - 5 \times 14 = 0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
Il est d'ailleurs évident que $\overrightarrow{v} = 7\overrightarrow{u}$ (coordonnées proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité égal à 7).

III Parallélisme et alignement

III.1 Droites parallèles

Propriété

Soient quatre points A, B, C et D distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Justification : les deux droites sont parallèles signifie qu'elles ont la même direction, donc les deux vecteurs ont la même direction donc donc sont colinéaires.

Exemple : soient $A(2~;~3)$, $B(10~;~5)$, $C(4~;~6)$ et $D(8~;~7)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
Il est clair que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires : les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

III.2 Points alignés

Propriété

Trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecrteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$).

Exemple : soient $A(2~;~3)$, $B(10~;~5)$ et $E(30~;~10)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ (exemple précédent).
$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}28\\7\end{pmatrix}$.
$\det\left(\overrightarrow{AB}~;~\overrightarrow{AE}\right) = 8\times 7 - 2\times 28 = 0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
Les trois points A, B et E sont donc alignés.

IV Aire d'un parallélogramme

Propriété

Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}\right)$.
L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $\det\left(\overrightarrow{AB}~;~\overrightarrow{AD}\right)$.