

Factorisation d'une expression algébrique

Table des matières

I	Factorisations avec un facteur commun	1
II	Comment factoriser une expression algébrique avec un facteur commun?	1
III	Avec un facteur commun moins apparent	2
IV	Avec des identités remarquables	3
V	Avec facteur commun et identités remarquables	4
VI	Quand on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable	5
VII	Pour s'entraîner sur Internet	5
	VII.1 Consulter par exemple les vidéos suivantes sur Internet	5
	VII.2 Liste d'exercices	5



Définition

Factoriser une expression algébrique consiste à la transformer (lorsque c'est possible) pour qu'elle soit sous la forme d'un produit de facteurs le plus simples possibles.

Remarque : Toutes les expressions algébriques ne sont pas factorisables dans \mathbb{R} .

Exemple : $x^2 + 1$ ne peut pas se factoriser dans \mathbb{R} .

I Factorisations avec un facteur commun

On utilise les règles suivantes :

$$\bullet ab + ac = a(b + c)$$

$$\bullet ab - ac = a(b - c)$$

II Comment factoriser une expression algébrique avec un facteur commun ?



Méthode

On recherche d'abord si l'expression a un facteur commun (évident ou pas) pour utiliser l'une des deux règles.

Exemples de factorisation avec un facteur commun

$$1) 2x + 6 = 2x + 2 \times 3 = \boxed{2(x + 3)}$$

$$2) 2xy + 3xz = \boxed{x(2y + 3z)}$$

$$3) x^2 - 3x = x \times x - 3x = \boxed{x(x - 3)}$$

4) **Factoriser** $(2x+3)(5x+7) + (2x+3)(-2x+9)$.

On essaye de voir comment est constituée l'expression pour voir quelle règle l'on va utiliser.

$$\underbrace{(2x+3)}_a \underbrace{(5x+7)}_b + \underbrace{(2x+3)}_a \underbrace{(-2x+9)}_c$$

$$= ab + ac \text{ en posant : } \begin{cases} a = 2x+3 \\ b = 5x+7 \\ c = -2x+9 \end{cases}$$

$$= a(b+c)$$

$$= (2x+3)[(5x+7) + (-2x+9)] \text{ (en remplaçant } a, b \text{ et } c \text{ par leurs expressions)}$$

$$= (2x+3)(5x+7-2x+9)$$

$$= (2x+3)(3x+16)$$

donc : $(2x+3)(5x+7) + (2x+3)(-2x+9) = (2x+3)(3x+16)$

5) **Factoriser** $(3x+5)(7x-4) - (5x-3)(3x+5)$.

$$\underbrace{(3x+5)}_a \underbrace{(7x-4)}_b - \underbrace{(5x-3)}_c \underbrace{(3x+5)}_a$$

$$= ab - ca \text{ en posant : } \begin{cases} a = 3x+5 \\ b = 7x-4 \\ c = 5x-3 \end{cases}$$

Remarque : $ab - ca = ab - ac = a(b-c)$. En remplaçant a, b et c par leurs expressions, on trouve :

$$(3x+5)[(7x-4) - (5x-3)]$$

$$= (3x+5)(7x-4-5x+3) \text{ (attention au signe - devant la parenthèse)}$$

$$= (3x+5)(2x-1)$$

donc : $(3x+5)(7x-4) - (5x-3)(3x+5) = (3x+5)(2x-1)$

6) **Factoriser** $(7x+1)^2 - (7x+1)(3-2x)$.

On remarque que : $(7x+1)^2 - (7x+1)(3-2x) = \underbrace{(7x+1)}_a \underbrace{(7x+1)}_a - \underbrace{(7x+1)}_a \underbrace{(3-2x)}_b$

$$= aa - ab \text{ avec } \begin{cases} a = 7x+1 \\ b = 3-2x \end{cases}$$

$$= a(a-b)$$

$$= (7x+1)[(7x+1) - (3-2x)]$$

$$= (7x+1)(7x+1-3+2x)$$

$$= (7x+1)(10x-1)$$

Par conséquent : $(7x+1)^2 - (7x+1)(3-2x) = (7x+1)(10x-1)$.

7) **Factoriser** $(x+3)^2 - (x+3)$.

Il est « clair » que $(x+3)$ est un facteur commun.

$$(x+3)^2 - (x+3)$$

$$= \underbrace{(x+3)}_a \times \underbrace{(x+3)}_a - \underbrace{(x+3)}_a \times 1$$

$$= a \times a - a \times 1 \text{ avec } a = (x+3)$$

$$= a(a-1)$$

$$= (x+3)[(x+3) - 1]$$

$$= (x+3)(x+2)$$

D'où : $(x+3)^2 - (x+3) = (x+3)(x+2)$.

III Avec un facteur commun moins apparent

8) **Factoriser** : $(3x + 5)(2x + 7) - (6x + 10)(x + 13)$.

Il n'y a pas de facteur commun apparent, mais il est clair que $6x + 10 = 2(3x + 5)$.

Par conséquent : $(3x + 5)(2x + 7) - (6x + 10)(x + 13) = (3x + 5)(2x + 7) - 2(3x + 5)(x + 13)$.

$$\underbrace{(3x + 5)}_a \underbrace{(2x + 7)}_b - 2 \underbrace{(3x + 5)}_a \underbrace{(x + 13)}_c$$

$$= ab - 2ac \text{ avec } \begin{cases} a = 3x + 5 \\ b = 2x + 7 \\ c = x + 13 \end{cases}$$

$$= a(b - 2c)$$

$$= (3x + 5)[(2x + 7) - 2(x + 13)]$$

$$= (3x + 5)(2x + 7 - 2x - 26)$$

$$= (3x + 5)(-19)$$

$$= -19(3x + 5).$$

Par conséquent : $(3x + 5)(2x + 7) - (6x + 10)(x + 13) = -19(3x + 5)$

9) **Factoriser** $(15x - 3)(2x + 7) - 10x + 2$.

On remarque que : $15x - 3 = 5(3x - 1)$ et $-10x + 2 = -(10x - 2) = -2(5x - 1)$.

Par conséquent :

$$(15x - 3)(2x + 7) - 10x + 2 = 3 \underbrace{(5x - 1)}_a \underbrace{(2x + 7)}_b - 2 \underbrace{(5x - 1)}_a = 3ab - 2a \text{ avec } \begin{cases} a = 5x - 1 \\ b = 2x + 7 \end{cases}$$

$$= a(3b - 2)$$

$$= (5x - 1)(3(2x + 7) - 2)$$

$$= (5x - 1)(6x + 21 - 2)$$

$$= (5x - 1)(6x + 19).$$

D'où : $(15x - 3)(2x + 7) - 10x + 2 = (5x - 1)(6x + 19)$

IV Avec des identités remarquables

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

1. **Factoriser** : $9x^2 + 42x + 49$.

Il n'y a aucun facteur commun donc on recherche si on peut faire apparaître une identité remarquable.

$$9x^2 + 42x + 49 = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 7 + 7^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ avec } \begin{cases} a = 3x \\ b = 7 \end{cases}$$

$$= (a + b)^2 \\ = (3x + 7)^2.$$

Par conséquent : $9x^2 + 42x + 49 = (3x + 7)^2$

2. **Factoriser** : $100x^2 - 121$.

$$100x^2 - 121 = (10x)^2 - 11^2 = a^2 - b^2 \text{ avec } a = 10x \text{ et } b = 11$$

$$= (a + b)(a - b) \\ = (10x + 11)(10x - 11).$$

D'où : $100x^2 - 121 = (10x + 11)(10x - 11)$

3. **Factoriser** $(2x + 9)^2 - (3x - 13)^2$.

On voit que l'expression est la différence de deux carrés, ce qui fait penser à une identité remarquable.

$$(2x + 9)^2 - (3x - 13)^2 \\ = a^2 - b^2 \text{ avec } a = (2x + 9) \text{ et } b = (3x - 13) \\ = (a + b)(a - b) \\ = [(2x + 9) + (3x - 13)][(2x + 9) - (3x - 13)] \\ = (2x + 9 + 3x - 13)(2x + 9 - 3x + 13) \\ = (5x - 4)(-x + 22)$$

Par conséquent : $(2x + 9)^2 - (3x - 13)^2 = (5x - 4)(-x + 22)$

V Avec facteur commun et identités remarquables

1. **Factoriser** $A = (4x - 4) - (5x - 13)(x - 1) + x^2 - 1$

On remarque que : $4x - 4 = 4(x - 1)$ et $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$ (identité remarquable).

Par conséquent :

$$A = 4 \underbrace{(x - 1)}_a - \underbrace{(5x - 13)}_b \underbrace{(x - 1)}_a + \underbrace{(x + 1)}_c \underbrace{(x - 1)}_a \\ = 4a - ba + ca \text{ avec } a = (x - 1); b = (5x - 13) \text{ et } c = (x + 1) \\ = a(4 - b + c) \\ = (x - 1)[4 - (5x - 13) + (x + 1)] \\ = (x - 1)(4 - 5x + 13 + x - 1) \\ = (x - 1)(-4x + 16) \\ = (x - 1) \times 4(-x + 4) \\ = 4(x - 1)(-x + 4)$$

D'où : $A = (4x - 4) - (5x - 13)(x - 1) + x^2 - 1 = 4(x - 1)(-x + 4)$.

2. **Factoriser** $B = x^2 - 4x + 4 + (1 - 5x)(2 - x) + (x - 2)$

On remarque que : $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x - 2)^2$ (identité remarquable) et que $(2 - x) = (-1) \times (x - 2) = -(x - 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent : } B &= x^2 - 4x + 4 + (1 - 5x)(2 - x) + (x - 2) \\ &= (x - 2)^2 + (1 - 5x) \times (-1) \times (2 - x) + (x - 2) \\ &= \underbrace{(x - 2)}_a \underbrace{(x - 2)}_a - \underbrace{(1 - 5x)}_b \underbrace{(x - 2)}_a + \underbrace{(x - 2)}_a \text{ avec } a = (x - 2), b = (1 - 5x) \\ &= aa - ba + a \\ &= a(a - b + 1) \\ &= (x - 2)[(x - 2) - (1 - 5x) + 1] \\ &= (x - 2)(x - 2 - 1 + 5x + 1) \pm \pm = (x - 2)(6x - 2) \\ &= (x - 2) \times 2(3x - 1) \\ &= 2(x - 2)(3x - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent : $B = x^2 - 4x + 4 + (1 - 5x)(2 - x) + (x - 2) = 2(x - 2)(3x - 1)$

VI Quand on ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable

3. **Factoriser** $3x^2 - 5x + 18 + (3x + 2)(5x - 9)$.

On ne voit ni facteur commun, ni identité remarquable.

En développant, on trouve ;

$$\begin{aligned} A &= 3x^2 - 5x + 18 + (3x + 2)(5x - 9) \\ &= 3x^2 - 5x + 18 + (15x^2 - 27x + 10x - 18) \\ 3x^2 - 5x + 18 + 15x^2 - 27x + 10x - 18 \\ &= 18x^2 - 22x \\ &= 9 \times 2x \times x - 11 \times 2x \\ &= 2x(9x - 11). \end{aligned}$$

D'où : $3x^2 - 5x + 18 + (3x + 2)(5x - 9) = 2x(9x - 11)$

Remarque :

Vous verrez en Première une technique pour factoriser, lorsque cela est possible, toute expression du second degré, c'est-à-dire une expression du type $ax^2 + bx + c$, a , b et c réels, $a \neq 0$.

Rappel : toutes les expressions algébriques ne sont pas factorisables !

C'est le cas de $x^2 + 1$ par exemple.

VII Pour s'entraîner sur Internet

VII.1 Consulter par exemple les vidéos suivantes sur Internet

Avec un facteur commun :

- cliquer [ici](#)
- cliquer [ici](#)
- cliquer [ici](#)

Avec une identité remarquable :

Cliquer [ici](#)

VII.2 Liste d'exercices

- cliquer [ici](#)
- cliquer [ici](#)