Droites et systèmes d'équations

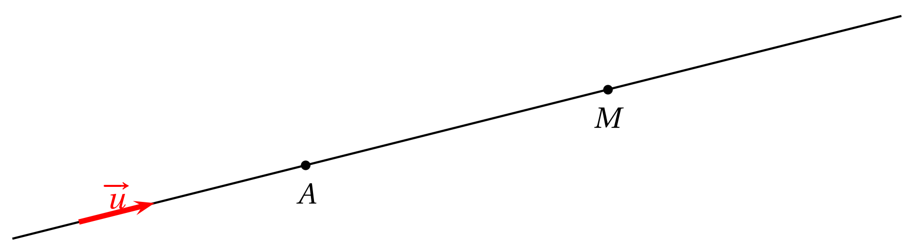
Table des matières

I Équation cartésienne d'une droite

I.1 Vecteur directeur d'une droite

Propriété (admise)

Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et soit A un point.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires est une droite qui passe par A.
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est appelé **vecteur directeur** de cette droite



Propriétés

Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et une droite d' de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.

- Les vecteurs directeur de d sont les veccteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.
- Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

I.2 Équation cartésienne de droite

Propriété et définition

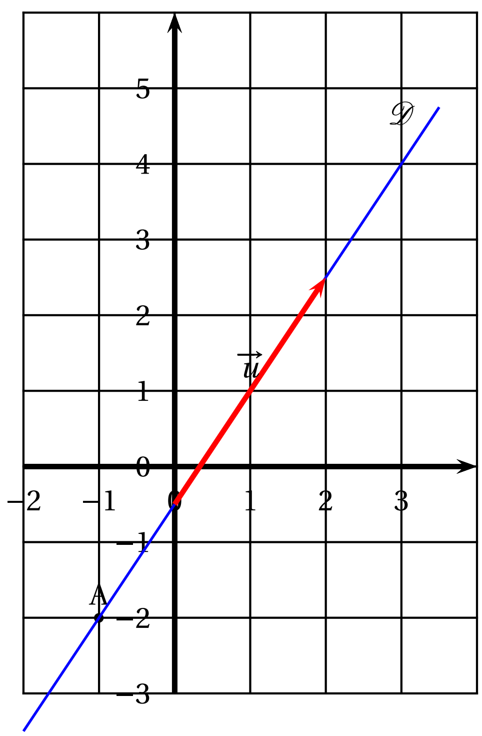
Soient a, b et c trois réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
L'équation $ax+by+c=0$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite d.

Exemple : soit l'équation cartésienne $3x-2y-1=0$. C'est une droite $\mathscr{D}$.
Pour $x=-1$, on trouve $2y=3x-1=3\times(-1)-1=-4$ donc $y=-2$.
$\mathscr{D}$ passe par $A(-1\ ;\ -2)$.

L'équation est de la forme $ax+by+c=0$ avec $\begin{cases}a=3\\b=-2\\c=-1\end{cases}$.

Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$..

Représentons cette droite :



Propriété

Soient a et b deux réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
Toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$

Exercice : trouver une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(1\ ;\ 5)$ et $B(5,-2)$.

- Un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$.
- $M \in (AB)$si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
  M a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$.
  On doit avoir $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{ALM}\right) = 0$.
  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}$.
  $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4 & x-1\\-7 & y-5\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(y-5)-(-7)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 4y-20+7x-7 = 0 \Leftrightarrow \boxed{7x+4y-27=0}$

II Équation réduite d'une droite

II.1 Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété

Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation cartésienne de d peut se mettre sous la forme $x = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque :

- tous les points de la droite d ont une abscisse égale à k et tous les points d'abscisse k appartient à d.
- Une telle droite (parallèle à l'axe des ordonnées) ne représente pas une fonction.

II.2 Droite sécante à l'axe des ordonnées

Propriété et définition

Soit d une droite sécante à l'axe des ordonnées.
L'équation cartésienne de la droite d peut s'écrire sous la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux réels.
On dit que $y = mx + p$ est **l'équation réduite** de la droite d.
Remarque : un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

Remarque : c'est l'expression d'une fonction affine.

Rappel : si $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ sont deux points distincts de la droite, on a : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et m s'appelle le coefficient directeur.

Propriété

Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si, et seulement si, $m = m'$.

III Systèmes d'équations linéaires

III.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux onconnues

Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut d'écrire sous la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Définition

Une solution d'un tel système est un couple $(x\ ;\ y)$ pour lesquelles les deux équations sont vraies simultanément.

Définition

Résoudre un système consiste à trouver tous les couples $(x\ ;\ y)$ solutions du système.

III.2 Lien avec les droites

$ax+by=c \Leftrightarrow ax+by-c=0$ qui est l'équation cartésienne d'une droite.
Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est donc le système formé par deux équations cartésienne de droites.
Un couple $(x\ ;\ y)$ est solution du système si, et seulement si, (x; y) sont les coordonnées d'un point appartenant aux deux droites **simultanément**.

Trois cas sont possibles :

- les deux droites sont sécantes; elles n'ont qu'un point d'intersection et le système n'a qu'un couple solution.
- les deux droites sont strictement parallèles, donc n'ont aucun point d'intersection : le système n'a aucune solution.
- les deux droites sont confondues : le système a une infinité de couples solutions.

Exemples :

1. Soit le système : $\begin{cases} 3x-2y=5\ (E_1) \\ 5x+3y=13\ (E_2) \end{cases}$.
   - L'équation (E_1) s'écrit : $3x-2y-5=0$ qui est l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
   - L'équation (E_1) s'écrit : $5x+3y-13=0$ qui est l'équation cartésienne d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.
   - $\det\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)=-10+9=-1\neq 0$.
     Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites sont sécantes; le système n'a qu'une solution (on verra dans le paragraphe suivant comment résoudre ce système).

- $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 6x-4y=1 \end{cases}$.
  Les vecteurs directeurs des deux droites correspondantes sont colinéaires (cordonnées proportionnelles) ; $6=2\times 3$ et $-4=2\times 2$ donc les droites sont parallèles.
  $2\times 5 \neq 1$ donc les droites sont strictement parallèles (équations **incompatibles**)
- Soit le système $\begin{cases} 5x-2y=7 \\ 15x-6y=21 \end{cases}$.
  Les vecteurs directeurs des deux droites sont $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\15\end{pmatrix}$, clairement colinéaires, car $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{u}$.
  Les droites sont parallèles ; de plus, les équations sont proportionnelles, donc on a en fait deux fois la même équation.
  Les deux droites sont confondues : il y a une infinité de couples solutions, correspondant aux coordonnées des points de la droite.

III.3 Méthode de résolution par substitution

On considère un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Il s'agit, à partir d'une des deux équations, d'exprimer une des inconnues en fonction de l'autre et de remplacer (**substituer**) par cette expression dans l'autre équation.
Cela n'a d'intérêt que si l'expression d'une inconnue en fonction de l'autre, est facile (pas de fraction).

Exemple :

Résoudre : $\begin{cases} 3x+y=19 \ (E_1) \\ 2x-5y=7 \ (E_2) \end{cases}$.

On voit que (E_1) équivaut à $y=19-3x$.

' On remplace y par $19-2x$ dans (E_2) :

$2x-5(19-3x)=7 \Leftrightarrow 2x-95+15x=7 \Leftrightarrow 17x-95=7 \Leftrightarrow 17x=102 \Leftrightarrow \boxed{x=6}$.

Or $y=19-3x$ donc $y=19-3\times 6=1$.

Le couple solution est $(6;1)$: $\boxed{\mathscr{S}=\{(6\,;\,1)\}}$.

III.4 Méthode de résolution par combinaison ou élimination

Exemple :

Reprenons le système : $\begin{cases} 3x-2y=5 \ (E_1) \\ 5x+3y=13 \ (E_2) \end{cases}$.

On multiplie les termes de chacune des équations par un nombre pour obtenir le même coefficient pour x ou y.

On additionne ou on soustrait alors les deux équations pour faire disparaître l'inconnue ayant le même coefficient.

Multiplions la première équation par 3 et la deuxième par 2 ; on obtient :

$\begin{cases} 9x-6y=15 \ (E_1') \\ 10x+6y=26 \ (E_2') \end{cases}$.

On additionne :

On obtient : $19x=41$ d'où $\boxed{x=\dfrac{41}{19}}$.

Pour trouver y, ont remplace x par $\dfrac{41}{19}$ dans une des équations initiales :

$3x-2y=5 \Leftrightarrow 3\times\dfrac{41}{19}-2y=5 \Leftrightarrow \dfrac{123}{19}-5=2y$

$\Leftrightarrow \dfrac{28}{19}=2y \Leftrightarrow y=\dfrac{14}{19}$.

$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(\dfrac{41}{19}\,;\,\dfrac{14}{19}\right)\right\}}$.