Exercices sur la somme de vecteurs et la relation de Chasles

I

Dans chacun des exercices donnés ci-dessous, déterminez le vecteur égal au vecteur $\vec{u}$.

a) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{IQ}}+\overrightarrow{\mathrm{FI}}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IQ}=\boxed{\overrightarrow{CQ}}$. (En utilisant la relation de Chasles)

b) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{HO}}+\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\boxed{\overrightarrow{HZ}}$.

c) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{SY}}+\overrightarrow{\mathrm{IJ}}+\overrightarrow{\mathrm{JK}}+\overrightarrow{\mathrm{KS}}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KS}+\overrightarrow{SY}=\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KY}=\boxed{\overrightarrow{IY}}$.

d) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{ST}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{DJ}}+\overrightarrow{\mathrm{LO}}+\overrightarrow{\mathrm{JL}}=\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JL}+\overrightarrow{LO}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{LS}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{WT}=\boxed{\overrightarrow{DT}}$.

e) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{EW}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EW}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EW}=\boxed{\overrightarrow{AW}}$.

f) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{NV}}+\overrightarrow{\mathrm{DN}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NV}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DV}=\boxed{\overrightarrow{AV}}$.

g) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{NT}}+\overrightarrow{\mathrm{FN}}+\overrightarrow{\mathrm{TU}}=\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\overrightarrow{\mathrm{FN}}+\overrightarrow{\mathrm{NT}}+\overrightarrow{\mathrm{TU}}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NU}=\boxed{\overrightarrow{CU}}$.

h) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{EG}}+\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\boxed{\overrightarrow{EQ}}$.

i) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\boxed{\overrightarrow{AE}}$.

j) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{VW}}+\overrightarrow{\mathrm{SV}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}\overrightarrow{\mathrm{NP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{GN}}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SV}+\overrightarrow{VW}=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SW}=\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SW}=\boxed{\overrightarrow{GW}}$

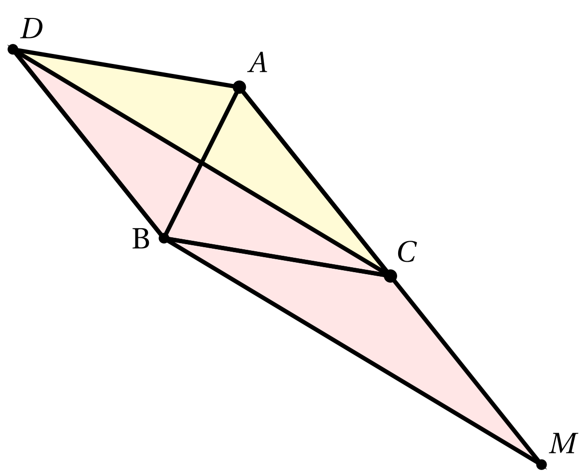
k) $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{VW}}+\overrightarrow{\mathrm{SV}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{NP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{GN}}=\overrightarrow{\mathrm{NP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\overrightarrow{\mathrm{SV}}+\overrightarrow{\mathrm{VW}}=\boxed{\overrightarrow{NW}}$.

II

ABC est un triangle.

1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ équivaut à $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$.
   Voir figure ci-dessous.
   Puisque $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$, ADBC est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.
   On doit donc avoir : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{DC}$; on en déduit que BMCD est un parallélogramme.
   On construit M à l'aide d'un compas.

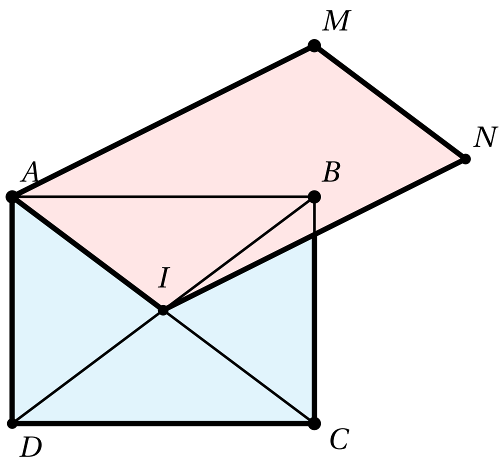
Figure :



III

Soit $ABCD$ un rectangle de centre I et M un point quelconque.
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}$ équivaut à $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}$.
On a donc $\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AI}}$.

Puisque $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AI}$, le quadrilatère $AINM$ est un parallélogramme.



IV

On considère un objet mobile soumis à trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$.

L'objet est-il en équilibre ou va-t'il se déplacer? Dans quelle direction?
On doit construire le vecteur somme
$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$.
On appelle $\overrightarrow{F_4}$ la somme $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. C'est la somme de deux vecteurs de même origine, donc la diagonale du parallélogramme que l'on peut former sur ces deux vecteurs.
Alors : $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_3}$.
La force résultante, $\overrightarrow{F}$ est différente du vecteur nul; l'objet va se déplacer, vers le haut.
Attention, la norme du vecteur $\overrightarrow{F}$ correspond à l'intensité de la force appliquée à l'objet, pas à la longueur de son déplacement.