2$^{\text{nde}}$: correction du contrôle sur les vecteurs

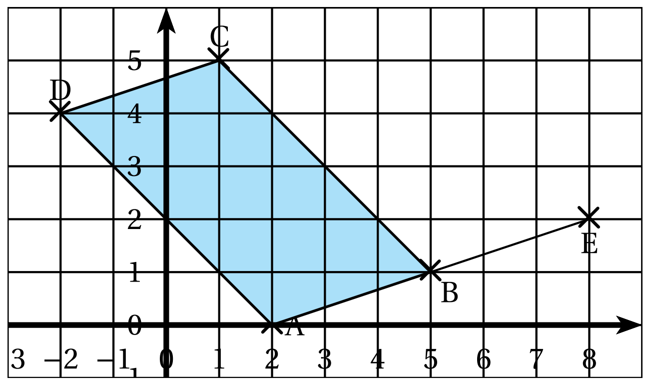
Exercice I (1,5 point)

À l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

1. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \boxed{\overrightarrow{AF}}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \boxed{\overrightarrow{AD}}$

Exercice II (3,5 points)

On considère la figure ci-dessous



1. $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. E est le symétrique de A par rapport à B.
   (a) Pour E, voir figure
   (b) On a : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$ car $ABCD$ est un parallélogramme et $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}}$ car B est le milieu de AE par construction.
   (c) On en déduit que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$. On en déduit que $BECD$ est un parallélogramme.

Exercice III (3 points)

Dans un repère orthonormé, on donne les points : A(-2 ; 4), B(3 ; 3) C(-1 ; 0), D(4 ; -1).

1.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2)=5 \\ 3-4=-1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$
   - $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
     On en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.
2.
   - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$
   - $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $BD = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \neq \sqrt{26}$
   - $AB \neq BDC$; le parallélogramme $ABDC$ a deux côtés consécutifs $[AB]$ et $[BD]$ de longueurs différentes : ce n'est **pas un losange**.

Exercice IV (3 points)

Dans un repère (O ; I ; J), on considère les points A(1 ; 4), B(5 ; -3) et C(2 ; 5).
$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

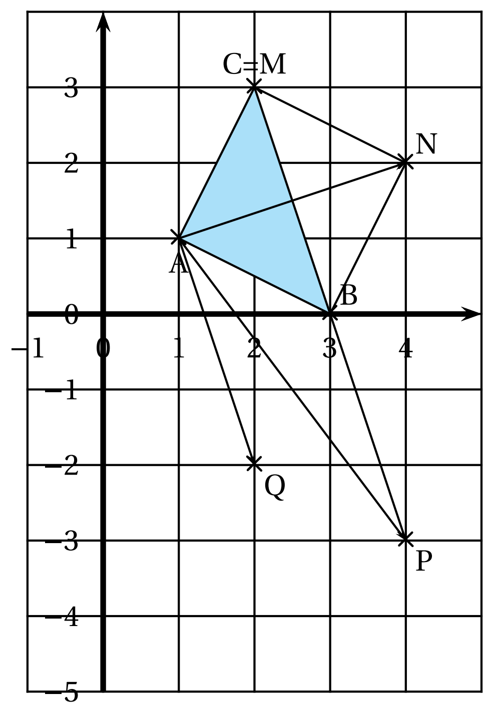
- $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}}$
- $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-x_D\\5-y_D\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si, et seulement si, $\begin{cases}2-x_D=4\\5-y_D=-7\end{cases}$ d'où { d'où $\begin{cases}2-4=x_D\\5+7=y_D\end{cases}$.

  On en déduit que les coordonnées de D sont $\boxed{D(-2\ ;\ 12)}$.

Exercice V (3 points)

Sur la figure ci-contre, on a représenté un triangle ABC. Construire les points M, N, P, Q définis par :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AC}}$ donc $\boxed{M = C}$
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: N est le quatrième sommet du parallélogramme donc $[AB]$ et $[AC]$ sont deux côtés consécutifs (voir cours).
- $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
  On place P tel que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BP}$.
  Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP}$
- $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.



Exercice VI (3 points)

On donne les points A(3 ; -1), B(7 ; 5) et C(-3 ; 3) dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

1. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}}$
   - $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}}$
   - $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}}$.

2. • $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\boxed{\sqrt{52}}$

   • $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ donc $BC=\sqrt{(-10)^2+(-2)^2}=\boxed{\sqrt{104}}$

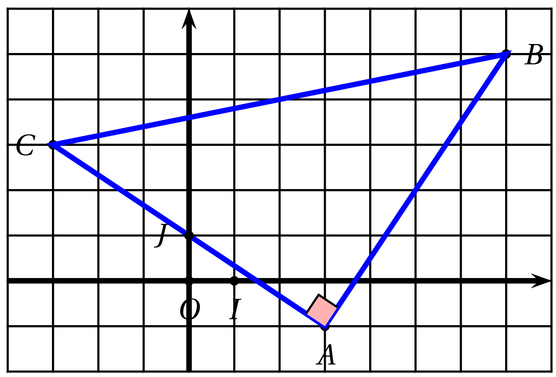
   • $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{(-6)^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\boxed{\sqrt{52}}$

3. • $AB=AC$ donc le triangle ABC est **isocèle** en A.

   • $BC^2=104$ et $AB^2+AC^2=52+52=104$ donc $BC^2=AB^2+AC^2$.

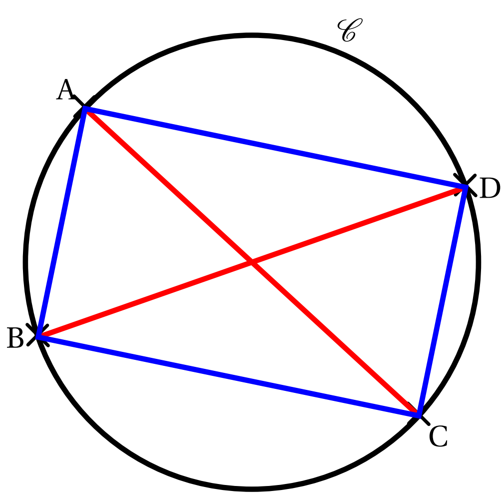
   • D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en A.
   Le triangle ABC est donc **isocèle rectangle** en A.

Figure non demandée :



Exercice VII (3 points)

Soient [AC] et [BD] deux diamètres d'un cercle $\mathscr{C}$.
Figure :



1. Par construction, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu, donc c'est un parallèle. Comme ce sont les diamètres d'un cercle, les diagonales ont la même longueur, donc $ABCD$ est une rectangle.
2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   Par conséquent : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ en appliquant la relation de Chasles.