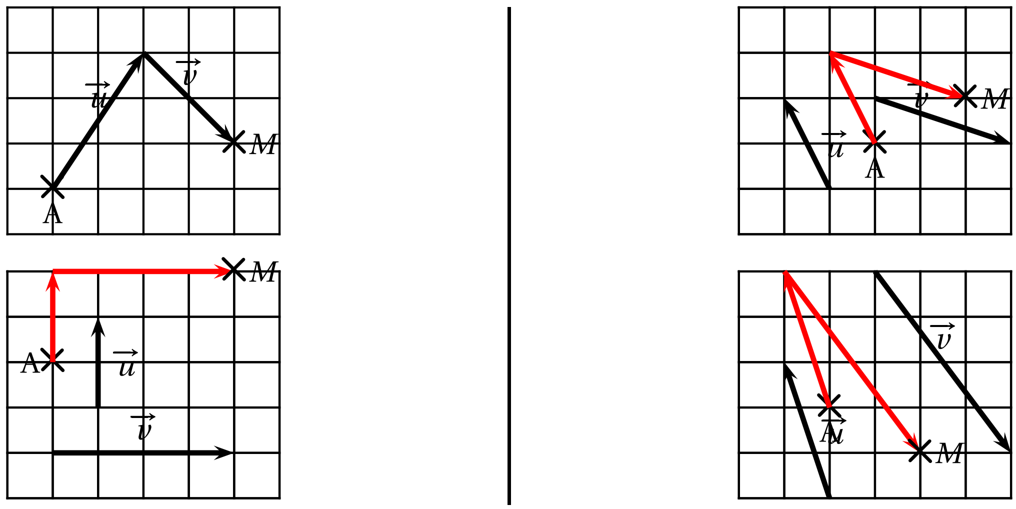
2nde : correction du TD nº 9 (vecteurs et coordonnées)

Exercice I

Sur chacune des quatre figures suivantes, placer M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$:



Exercice II

Soiznt A(- 2 ; 1), B(2 ; 3), C(3 ; -1) et D(7 ; 1).

1. • $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\3-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

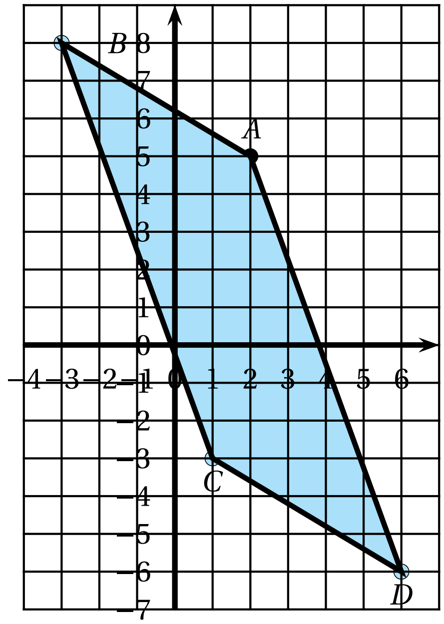
   • $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7-3\\1-(-1))\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car ces vecteurs ont les mêmes coordonnés.
   On n'en déduit que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice III

Soient $A(2\,;\,5)$, $B(-3\,;\,8)$ et $C(1\,;\,-3)$.
On veut calculer les coordonnées de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. Compléter : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (⚠ attention à l'ordre des points)
2. $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}}$
3. $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\-3-y_D\end{pmatrix}}$
4. Ces deux vecteurs doivent être égaux donc ils doivent avoir les mêmes coordonnées.
   Donc : $\begin{cases}1-x_D=-5\\-3-y_D=3\end{cases}$ d'où : $\begin{cases}1+5=x_D\\-3-3=y_D\end{cases}$.
   D a pour coordonnées : $\boxed{D(6\,;\,-6)}$
   Figure (non demandée) :



Exercice IV

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-2 ;1), C(2 ;3), D(1 ;0) et M(0 ;7).

1. $x_B = \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1$ et $y_B = \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$.
   $\boxed{B(-1\ ;\ 4)}$.

2. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\3-1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-1\\3-0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (mêmes coordonnées) donc $ABCD$ un parallélogramme.

3. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.
   - $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-(-1)=3\\3-4=-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ d'où $BC = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$.
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-(-2)=4\\3-1=2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ d'où $AC = \sqrt{4^2+2^2=\sqrt{20}}$
   - $AB = BC = \sqrt{10}$ donc ABC est isocèle en B.
     $AC^2 = 20$ et $AB^2 + BC^2 = 10+10 = 20$ donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
     D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en B.
     Le triangle ABC est donc isocèle rectangle en B.
     $ABCD$ est un parallélogramme ; il a deux côtés consécutifs de même longueur, donc c'est un losange.
     De plus, il a un angle droit en B, donc c'est un **carré**.

Exercice V

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-2 ; 1) ,B(-l; -2), C(5 ; 0) et D(4 ; 3).

1. - $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-(-2)=-1+2=1 \\ -2-1=-3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-4=1 \\ 0-3=-3 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$.
   - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (même coordonnées) donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.
2. Pour montrer que c'est un rectangle, on peut montrer qu'il a un angle droit, ou que ses diagonales ont la même longueur.
   - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{49+1}=\boxed{\sqrt{50}}$.
   - $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 4-(-1)=5 \\ 3-(2)=5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ d'où $BD=\sqrt{5^2+5^2}=\boxed{\sqrt{50}}$.
   - $AC=BD$: $ABCD$ un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur : c'est un **rectangle**.