2^{nde} : correction du TD n° 8 (vecteurs)

I

En utilisant la relation de Chasles, recopier et compléter les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FU} + \overrightarrow{UE}$

c) $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{OS}$

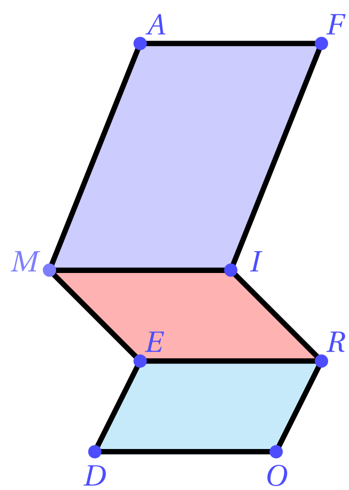
d) $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT}$

e) $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NY}$

II

Considérons huit points D, O, R, E, M, I, F et A tels que les quadrilatères DORE, REMI et MIFA sont tous des parallélogrammes **quelconques**.

1. Figure possible :



2. $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{ER}$ car $DORE$ est un paralélogramme.
3. (a) $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{MI}$ ($REMI$ est un parallélogramme)

   (b) $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AF}$ ($MIFA$ parallelograme)
4. On a $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{ER}$, $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AF}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AF}}$
5. Puisque $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AF}$, on en déduit que $DOFA$ est lui aussi un parallélogramme.

III

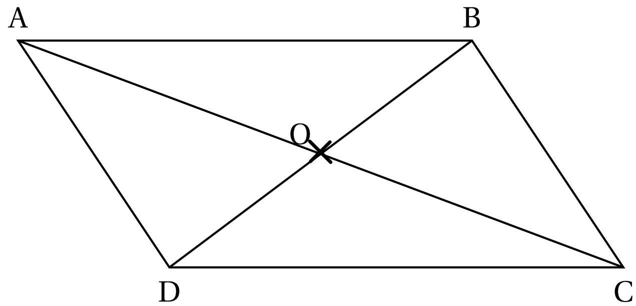
1. Soient A et B deux points quelconques ($A \neq B$). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.
2. (a) Si on fait subir à un objet une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, l'objet revient à sa **position initiale**.

   (b) On écrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$ (vecteur nul) car cela caractérise une translation correspondant à un mouvement « nul ».

   (c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \boxed{\overrightarrow{BC}}$.
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
   On obtient les deux diagonales du parallélogramme $ABDC$.

IV

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.



Indiquer si chacune des égalités suivantes est vraie ou non (expliquer).

a) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$: **VRAI**, car O est le milieu de la diagonale $[AC]$.

b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$: **VRAI** car O étant le milieu de la diagonale $[BD]$, on a $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{0}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$: **FAUX**, on ne peut pas appliquer la relation de Chasles.

d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$: **VRAI**. En effet :
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ car $ABCD$ étant un parallélogramme, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

e) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$: **FAUX**.
En effet : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ (d'après la relation de Chasles) et non $\overrightarrow{DA}$.

V

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \boxed{\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}}$.

2. $\cancel{\overrightarrow{BC}} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \cancel{\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \boxed{\overrightarrow{AD}}$

3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{AB}}$