TD n° 5 (milieu et longueur d'un segment)

I

On considère les points A(3; 4) et B(2; 2) du plan muni d'un repère (O; I; J).

$M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $M\left(\dfrac{3+2}{2}\ ;\ \dfrac{4+2}{2}\right)$ d'où : $\boxed{M\left(\dfrac{5}{2}\ ;\ 3\right)}$

II

Dans un repère (O; I; J) du plan, on considère les points $A(1\ ;\ -2)$, $B(6\ ;\ 1)$, $C(9\ ;\ 2)$ et $D(4\ ;\ -1)$.

Soit M le milieu de la diagonale $[AC]$: $M\left(\dfrac{1+9}{2}\ ;\ \dfrac{-2+2}{2}\right)$ d'où $\boxed{M(5\ ;\ 0)}$.

Soit M' le milieu de la diagonale $[BD]$: $M'\left(\dfrac{6+4}{2}\ ;\ \dfrac{1+(-1)}{2}\right)$ d'où $\boxed{M'(5\ ;\ 0)}$.

M et M' ont les mêmes coordonnées : $M = M'$.

Les deux diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu : c'est un parallélogramme.

III

Dans un repère du plan, on considère les points E(3; 4), F(6; 6) et G(4; -1).

$EFGH$ est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales ont le même milieu.

Soit M le milieu de la diagonale EG : $M\left(\dfrac{x_E+x_G}{2}\ ;\ \dfrac{y_E+y_G}{2}\right)$ donc $M\left(\dfrac{3+4}{2}\ ;\ \dfrac{4+(-1)}{2}\right)$, soit $\boxed{M\left(\dfrac{7}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)}$.

M doit être le milieu de l'autre diagonale $[FH]$, donc :

$\begin{cases} \dfrac{x_F+x_H}{2} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{y_F+y_H}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, c'est-à-dirte : $\begin{cases} \dfrac{6+x_H}{2} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{6+y_H}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

En multipliant par 2, on obtient : $\begin{cases} 6+x_H = 7 \\ 6+y_H = 3 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x_H = 7-6 = 1 \\ y_H = 3-6 = -3 \end{cases}$.

On en déduit que : $\boxed{H(1\ ;\ -3)}$

IV

Dans un repère orthonormé (O; I; J), on considère les points $A(3\ ;\ 7)$ et $B(8\ ;\ -2)$.

Le centre d'un cercle est le milieu des diamètres, donc le centre I du cercle est le milieu de $[AB]$.

$I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $\boxed{I\left(\dfrac{11}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)}$.

V

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3\ ;\ 7)$, $B(-3\ ;\ 1)$ et $C(1\ ;\ -3)$.

Calculons les longueurs des côtés :

- $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2} = \sqrt{(-3-3)^2+(1-7)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-6)^2} = \sqrt{36+36} = \boxed{\sqrt{72} = 6\sqrt{2}}$
- $BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+\left(y_C-y_A\right)^2} = \sqrt{(1-(-3))^2+(-3-1)^2} = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = \boxed{\sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$
-
- $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+\left(y_C-y_A\right)^2} = \sqrt{(1-3)^2+(-3-7)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-10)^2} = \sqrt{4+100} = \boxed{\sqrt{104} = 2\sqrt{26}}$

On constate que $AC^2 = 104$ et $AB^2 + /BC^2 = 32 + 72 = 104$.
$AC^2 = AB^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
Les côtés ont trois longueurs différentes, il n'est pas isocèle.

VI

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ du plan, on considère les points $A(-2\ ;\ -3)$, $B(4\ ;\ 1)$.

- Commençons par chercher les coordonnées de K, centre du cercle; K est le milieu de $[AB]$.
  $K\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc $K\left(\dfrac{-2+4}{2}\ ;\ \dfrac{-3+1}{2}\right)$. Par conséquent : $\boxed{K(1\ ;\ -1)}$.
- Calculons le rayon du cercle.
  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(4-(-2))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{2^2 \times 13}$
  $= 2\sqrt{13}$.
  La rayon r est $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$; $\boxed{r = \sqrt{13}}$.
- M appartient au cercle de diamètre $[AB]$si, et seulement si, $KM = r = \sqrt{13}$.
  $K(1\ ;\ -1)$; $M(3\ ;\ 2)$.
  Alors : $KM = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + \left(y_M - y_K\right)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = r$.
  La longueur KM est égale au rayon du cercle : M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
- $K(1\ ;\ -1)$ et $N\left(-2\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.
  Alors : $KN = \sqrt{(x_N - x_K)^2 + \left(y_N - y_K\right)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (\frac{5}{2} - (-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \dfrac{49}{4}} = \sqrt{\dfrac{85}{4}}$
  $= \dfrac{\sqrt{85}}{2} \neq \sqrt{13}$.
  La longueur KN n'est pas égale au rayon du cercle : N n'appartient pas au cercle de diamètre $[AB]$.