2^{nde} correction du TD nº 24 (équations)

I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $5x-2=4-2x \Leftrightarrow 5x+2x=4+2 \Leftrightarrow 7x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{7}$; $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{6}{7}\right\}}$

2. $4(x-6)=3(2x+3) \Leftrightarrow 4x-24=6x+9 \Leftrightarrow 4x-6x=9+24 \Leftrightarrow -2x=33 \Leftrightarrow x=\dfrac{33}{2}=-\dfrac{33}{2}$; $\boxed{\mathscr{S}=-\dfrac{33}{2}}$

3. $\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}x-1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6}-\dfrac{7}{12}x=-1-\dfrac{1}{4}$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{7}{12}\right)x=-\dfrac{4}{4}-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2-7}{12}\right)x=-\dfrac{5}{4}$
$\Leftrightarrow -\dfrac{5}{12}x=-\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{-\frac{5}{4}}{-\frac{5}{12}}=\dfrac{\cancel{5}}{4}\times\dfrac{12}{\cancel{5}}=3$;
$\boxed{\mathscr{S}=3}$

II

Soit x le prix d'une assiette plate en €.
Une assiette creuse coûte alors $x-2$ et une assiette à dessert coute $x-5$.
Mise en équation : on a alors : $24x+12(x-2)+12(x-5)=540$.
Résolution :
$24x+12(x-2)+12(x-5)=540 \Leftrightarrow 24x+12x-24+12x-60=540$
$\Leftrightarrow 48x+540+24+60 \Leftrightarrow 48x=624 \Leftrightarrow x=\dfrac{624}{48}=13$.
Une assiette plate coûte 13 €.
Une assiette creuse coûte 11 € et une assiette à dessert coûte 8 €.

III

En retranchant un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{23}{38}$, on obtient l'inverse de cette fraction, donc $\dfrac{38}{23}$.
Soit x ce nombre.
On a : $\dfrac{23-x}{38-x}=\dfrac{38}{23}$.

Résolution :
$\dfrac{23-x}{38-x}=\dfrac{38}{23} \Leftrightarrow 23(23-x)=38(38-x) \Leftrightarrow 529-23x=1444-38x$
$\Leftrightarrow -23x+38x=1444-529 \Leftrightarrow 15x=915 \Leftrightarrow x=\dfrac{915}{15}=\boxed{61}$.

Vérification : $\dfrac{23-61}{38-61}=\dfrac{-28}{-23}=\dfrac{28}{23}$

IV

Uune équation dont les uniques solutions sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5 est par exemple $\boxed{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=0}$.

V

Résoudre l'équation : $(3x-7)(5x+3)=0$.
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- Premier cas : $3x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$
- Deuxième cas : $5x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}$

$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{3}{5}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right\}}$

VI

On veut résoudre l'équation

$$(5x+8)(3x-1)-\left(9x^2-6x+1\right)=0.$$

a) $9x^2-6x+1=(3x)^2-2\times3x\times1+1^2=\boxed{(3x-1)^2}$

b) L'équation s'écrit :
$(5x+8)(3x-1)-\left(9x^2-6x+1\right)=0$
$\Leftrightarrow (5x+8)(3x-1)-(3x-1)^2=0$
$(3x-1)\,[(5x+8)-(3x-1)]=0$
$\Leftrightarrow (3x-1)(5x+8-3x+1)=0$
$\Leftrightarrow \boxed{(5x+8)(2x+9)=0}$

c) On applique le théorème du produit nul :

- $5x+8=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{5}$
- $2x+9=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{2}$

L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{9}{2}\ ;\ -\dfrac{8}{5}\right\}}$.