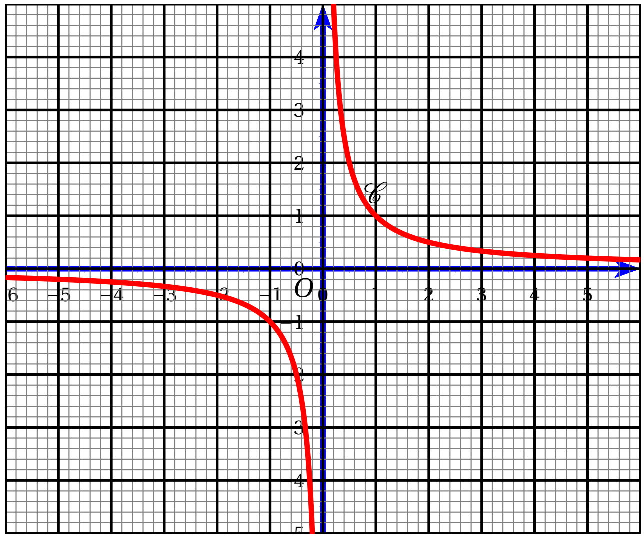
2nde : TD nº 23 (fonctions inverse et racine carrée)

Exercice I

On considère la fonction inverse notée f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



Graphiquement et sans justification, donner l'image par la fonction f des intervalles suivants :

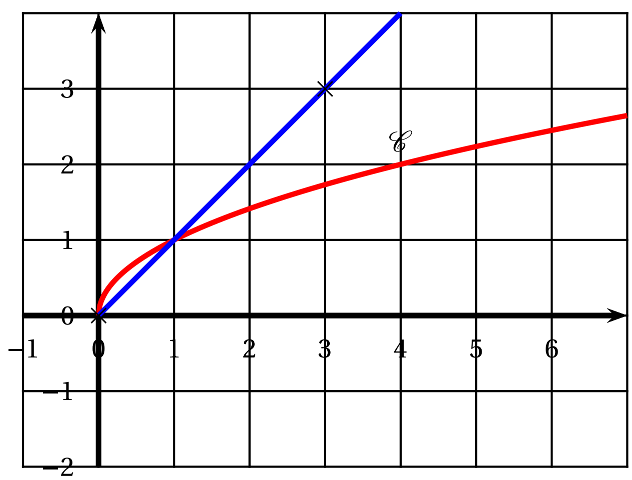
a) $f([1\ ;\ 2]) = \boxed{\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]}$; en effet, f est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$

b) $f\left(\left]-3\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\right) \boxed{= \left]-2\ ;\ -\frac{1}{3}\right)}$

c) $f\left(\left[\frac{1}{4}\ ;\ 4\right[\right) = \left[\frac{1}{4}\ ;\ 4\right]$ car $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ et $f(4) = \frac{1}{4}$

Exercice II

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction racine carrée :



1. g est linéaire, donc la droite passe par l'origine et $g(3) = 3$ donc la droite passe par le point de coordonnées $(3; 3)$.
2. Des nombres x sont égaux à leurs racines carrées se traduit par x est solution de l'équation $\sqrt{x} = x$.
   Si de tels nombres existent, il sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
   On voit que c'est le cas pour $x = 0$ et $x = 1$.
   0 et 1 sont égaux à leurs racines carrées.

   Remarquer : on voit, d'après les courbes, que $\sqrt{x} \geqslant x$ pour $x \in [0\ ;\ 1]$ et $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$ pour $x \geqslant 1$.

Exercice III

La fonction $x : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc conserve l'ordre; 2,34<2,35.
Donc : $\boxed{\sqrt{2,34} < \sqrt{2,35}}$

Exercice IV

On lâche un corps en chute libre à une hauteur h du sol. En supposant qu'il n'est soumis à aucun frottement, la vitesse v (en m/s) au moment de l'impact avec le sol est donnée par $v = \sqrt{2gh}$, où h est en mètre.
On donne $g = 9,81 \text{m s}^{-2}$

1. Si $h = 50$, $v = \sqrt{2 \times 9,81 \times 50} = \sqrt{100g} \approx \sqrt{100 \times 9,81} = \sqrt{981} \approx \boxed{31,32}$.m/s.
   $v = \dfrac{31,02}{1000} \times 3\,600 \approx \boxed{112,8}$ km/h
2. 180 km/h $= \dfrac{180\,000}{3\,600} = 50$ m/s.
   On doit résoudre l'inéquation : $v \geqslant 50$ donc $\sqrt{2gh} \geqslant 50$.
   Comme la fonction carré est croissante sur l'ensemble des nombres positifs, cela équivaut à :
   $\sqrt{2gh}^{2} \geqslant 50^2$ donc $2gh \geqslant 2\,500$ sd'où $h \geqslant \dfrac{2\,500}{2g} = \dfrac{\sqrt{2\,500}}{2 \times 9,81} = \dfrac{\sqrt{2\,500}}{19,62} \approx \boxed{127,4}$ m.
   Pour dépasser 180 km/h en chute libre, il faut lâcher l'objet d'une hauteur supérieure à 127,4 m environ.

Exercice V Oscillation d'un pendule

On appelle pendule simple un objet suspendu à une ficelle. On l'écarte de la verticale et on regarde les oscillations.
La période T (en seconde) d'un pendule simple, c'est-à-dire la durée d'une oscillation de celui-ci, peut être exprimée en fonction de sa longueur ℓ (en mètre) par : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.
On donne $g = 9,81 \text{m s}^{-2}$

1. Pour $\ell = 5$ m, on trouve : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5}{9,81}} \approx \boxed{4,5}$ s
2. $T = 10$ équivaut à $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = 10$ donc $\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} = \dfrac{10}{2\pi} = \dfrac{5}{\pi}$.
   Alors : $\dfrac{\ell}{g} = \left(\dfrac{5}{\pi}\right)^2 = \dfrac{25}{\pi^2}$ d'où $\ell = \dfrac{25}{\pi^2} \times g = \dfrac{25}{\pi^2} \times 9,81$
   $\approx \boxed{24,85}$
3. (a) $T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{5}{g}}$ et $T_B = 2\pi\sqrt{\dfrac{2 \times 5}{g}}$.
   On a : $T_B = 2\pi\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{g}} = \sqrt{2} \times 2\pi\sqrt{\dfrac{5}{g}} = \sqrt{2}T_A$.
   Le pendule B a une longueur double de celle de A; sa période est $\sqrt{2}$ fois celle du pendule A.

   (b) Soient ℓ_A et ℓ_B les longueurs des deux pendules.
   On suppose que $\ell_A \leqslant \ell_B$.
   On a successivement :
   $\ell_A \leqslant \ell_B$\$ $\dfrac{\ell_A}{g} \leqslant \dfrac{\ell_B}{g}$ (en divisant les deux membres par un nombre positif)
   $\sqrt{\dfrac{\ell_A}{g}} \leqslant \sqrt{\dfrac{\ell_B}{g}}$ en appliquant la fonction racine carrée, croissante.
   $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_A}{g}} \leqslant 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell_B}{g}}$ en multipliant par 2π.
   Donc $\boxed{T_A \leqslant T_B}$.
   Conclusion : plus le pendule est court, plus la période est petite.

Remarque : Au Panthéon se tourne le pendule de Foucault : une masse assez lourde est suspendue au plafond par un fil de 67 m, qui correspond à une période (durée d'un aller-retour) de 16,42 s.
Les lois de la physique montrent que le plan vertical dans lequel oscille le pendule est fixe par rapport à un « référentiel galiléen », en gros l'espacé, alors que la Terre tourne sur elle-même. On voit donc que le plan d'oscillation tourne par rapport à un disque tracé au sol et cette rotation complète dure à Paris 31 h 47 min (elle dépend de la latitude) et vaudrait 24 h aux pôles.
La rotation ne se fait pas dans le même sens dans l'hémisphère Nord et dans l'hémisphère Sud; elle est nulle à l'équateur.