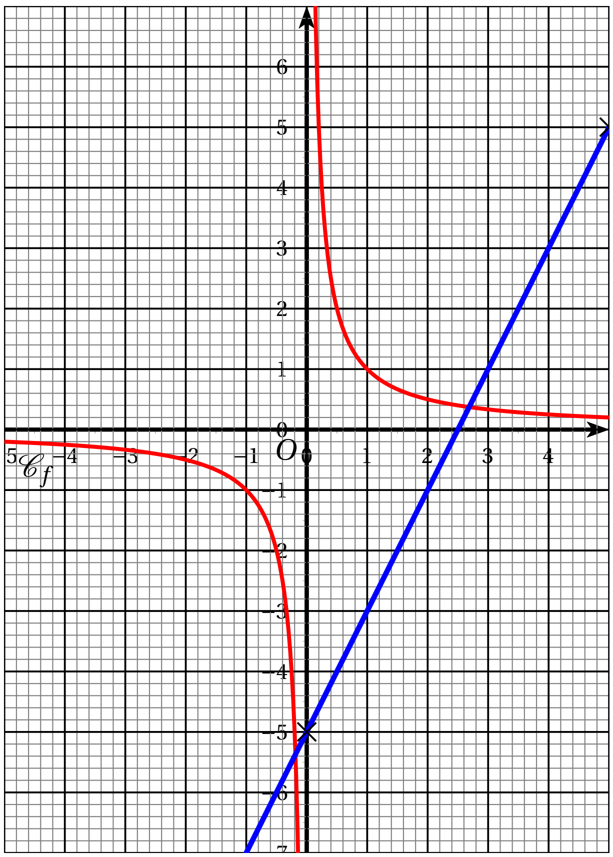
2$^{\text{nde}}$: correction du TD n° 22 (fonction inverse)

Exercice I

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction inverse $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$:



1. g est une fonction affine, dont la représentation graphique est une droite $\mathscr{D}_g$.
   Pour tracer cette droite, on a besoin de deux points dont il suffit de calculer les coordonnées.
   On choisit deux valeurs de x et on calculer les valeurs de y correspondantes :

x	0	5
$g(x) = 2x - 5$	-5	5

   Le droite $\mathscr{C}_g$ passe donc par les points de coordonnées $(0\,;\,-5)$ été $(5\,;\,5)$ (voir graphique)
2. L'équation $\dfrac{1}{x} = 2x - 5$ équivaut à $f(x) = g(x)$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des eux courbes.
   On voit qu'il y a deux solutions.
   Graphiquement, on trouve $\boxed{x_1 \approx -0{,}2}$ et $\boxed{x_2 \approx 2{,}6}$.
3. Les solutions exactes sont $\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}$ et $\dfrac{5+\sqrt{33}}{4}$À la calculatrice, on trouve $x_1 \approx -0{,}186$ et $x_2 \approx 2{,}686$. On retrouve les valeurs lues graphiquement.

Exercice II

Donner les images des intervalles suivants par la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. (On pourra s'aider du graphique précédent)

a) Cherchons l'image de $]-4\,;\,-1[$.
$x \in]-4\,;\,-1[$ équivaut à $-4 \leqslant x \leqslant -1$.
Graphiquement, on cherche les ordonnées des points de l'hyperbole dont l'abscisse est comprise entre -4 et -1.
On trouve $-1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -1$ donc l'image de $]-4\,;\,-1[$ est $\boxed{\left[-1\,;\,-\dfrac{1}{4}\right]}$

b) Cherchons l'image de $\left[2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$; l'inverse de 2 est $\dfrac{1}{2}$; celui de $\dfrac{5}{2}$ est $\dfrac{2}{5}$.
On trouve que l'image de $\left[2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ est $\left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ donc $[0{,}4\,;\,0{,}5]$

On peut aussi raisonner autrement.
La fonction inverse f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
$2 \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}$ donc $f(2) > f(x) > f\left(\dfrac{5}{2}\right)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{5}}$

Exercice III

Donner les solutions des inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$.
On cher he graphiquement les abscisses des points de l'hyperbole dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 1.
On trouve $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[}$.

b) $\dfrac{1}{x} < -3$ a pour solution : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,0\right[}$.

c) $\dfrac{1}{x} > 7$ a pour solution : $\boxed{\mathscr{S} = \left]0\,;\,\dfrac{1}{7}\right[}$.

Exercice IV

1. On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2}{x}$ pour tout $x \neq 0$ et $g(x) = 2x - 3$ sur $\mathbb{R}$.
   $\mathscr{C}_f$ est tracée dans le repère ci-dessous.
   La courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g est une droite, représentée sur le graphique.

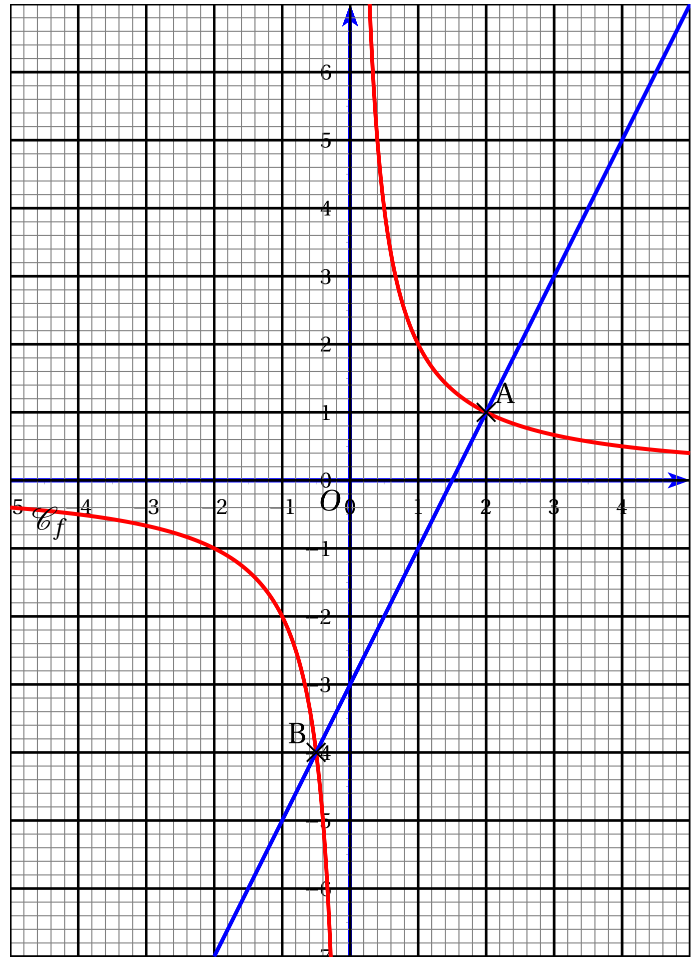
2.
   - $f(x_A) = f(2) = \dfrac{2}{2} = 1 = y_A$ donc $A \in \mathscr{C}_f$.
   - $g(x_A) = g(2) = \dfrac{2}{2} = 1 = y_A$ donc $A \in \mathscr{C}_g$.

   De même :

   - $f(x_B) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 = y_B$ donc $B \in \mathscr{C}_f$.
   - $g(x_B) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 3 = -4 = y_B$ donc $B \in \mathscr{C}_g$.

3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

   On trouve $\boxed{\mathscr{S} = \left[-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right[\cup [2\,;\,+\infty[}$.

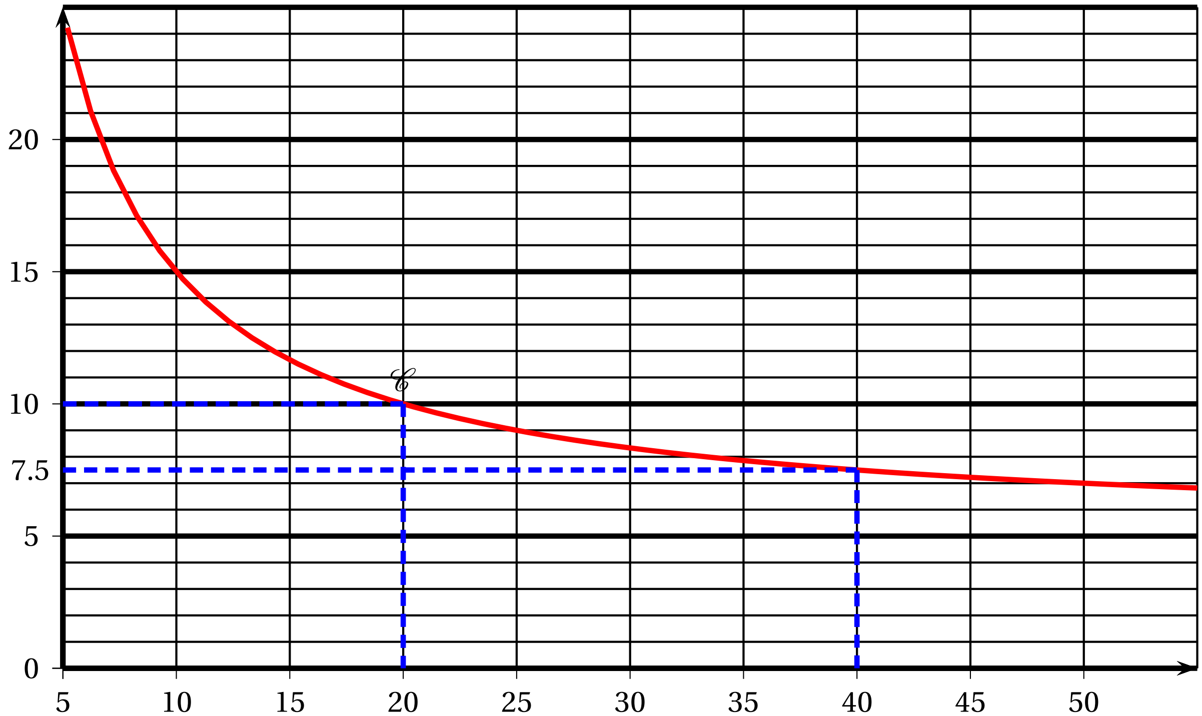


Exercice V

Un animateur organise un voyage pour x personnes où $x \in [5\,;\,50]$ (x n'est pas encore fixé).
Le transporteur facturera 100 euros de forfait plus 5 euros par personne. Le coût unitaire est $C_u(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{100+5x}{x} = \dfrac{100}{x} + \dfrac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{\dfrac{100}{x} + 5}$

a $C_u(5) = \dfrac{100}{5} + 5 = 20 + 5 = \boxed{25}$.
$C_u(10) = \dfrac{100}{10} + 5 = 10 + 5 = \boxed{15}$.
Le coût unitaire est moindre (plus faible) pour 10 personnes que pour 5.

b on donne ci-dessous la courbe de la fonction C_u :



c • Graphiquement, le coût unitaire de 10 € est obtenu pour la valeur x de l'abscisse du point de la courbe ayant une ordonnée égale à 10. On trouve $x = 20$.

• Algébriquement, on résout l'équation $C_u(x) = 10$.
$\dfrac{100}{x} + 5 = 10$ équivaut à $\dfrac{100}{x} = 5$ donc $100 = 5x$ d'où $x = \dfrac{100}{5} = \boxed{20}$.

d • Graphiquement, le coût unitaire de 5 € est obtenu pour la valeur x de l'abscisse du point de la courbe ayant une ordonnée égale à 5. On voit qu'il n'y a pas de solution.

• Algébriquement, on résout l'équation $C_u(x) = 5$.
$\dfrac{100}{x} + 5 = 5$ équivaut à $\dfrac{100}{x} = 0$ qui n'est pas possible, car, pour tout $x > 0$, $\dfrac{100}{x} > 0$.

e Graphiquement, on voit qu'on a un coûut unitaire de 7,5 € pour 40 personnes.
Le coût unitaire est strictement plus petit que 7,5 € pour $x \in]40\ ;\ +\infty[$ (don plus der 40 personnes).

f $C_u(x) < 7,5$ équivaut à $\dfrac{100}{x} + 5 < 7,5$ donc $\dfrac{100}{x} < 2,5$ donc, en appliquant la fonction inverse, décroissante sur $]_0\ ;\ +\infty[$:
$\dfrac{x}{100} > \dfrac{1}{2,5}$ donc $\dfrac{x}{100} > \dfrac{1}{2,5} = \dfrac{4}{10} = 0,4$ d'où, en multipliant par 100 : $\boxed{x > 40}$

g • Graphiquement, $C_u(x) > 9$ pour $\boxed{x > 25}$.

• Algébriquement :
$C_u(x) > 9$ équivaut à $\dfrac{100}{x} + 5 > 9$ donc $\dfrac{100}{x} > 9 - 5 = 4$ d'où $\dfrac{x}{100} < \dfrac{1}{4}$ qui donne :
$x < \dfrac{100}{4} = 25$.
Le coût unitaire est strictement supérieur à 9 € si le nombre de passagers est strictement inférieur à 25.