2^nde : correction du TD nº 12 (fonctions affines)

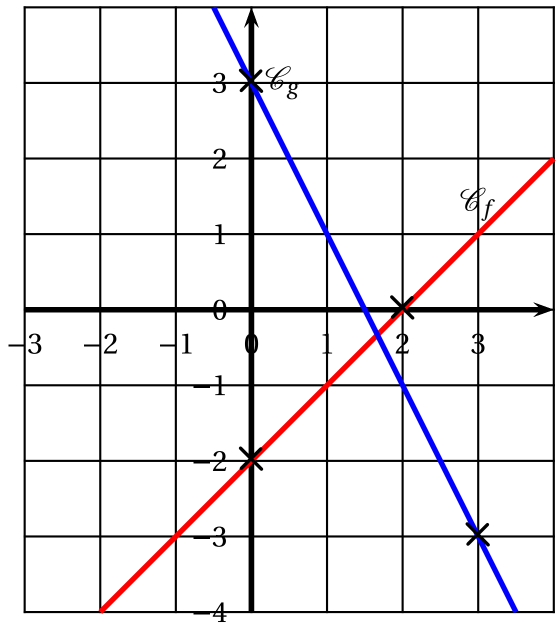
Exercice I

Les fonctions f et g sont définies pour tout réel x par $f(x) = x - 2$ et $g(x) = -2x + 3$.

1. Représentons dans un même repére les fonctions f et g.
   Pour chacune des droites représentatives de ces fonctions affines, il suffit de trouver les coordonnées de deux points.
   Renseignons des tableaux de valeur.

x	0	2
$f(x) = x - 2$	-2	0

x	0	3
$g(x) = -2x + 3$	3	-3



2. (a) a a la même image par f et par g s'il est solution de l'équation $f(x)x = g(x)$.

   $f(x) = g(x)$ équivaut à $x - 2 = -2x + 3$ donc $x + 2x = 3 + 2$, c'est-à-dire $3x = 5$ d'où $\boxed{x = \frac{5}{3}}$.

   $\frac{5}{3}$ ont la même image par f et par g.

   Cette image vaut $f\left(\frac{5}{3}\right)$ ou $g\left(\frac{5}{3}\right)$.

   $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} - 2 = \frac{5}{3} - \frac{6}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

   (b) Cela correspond à l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

Exercice II

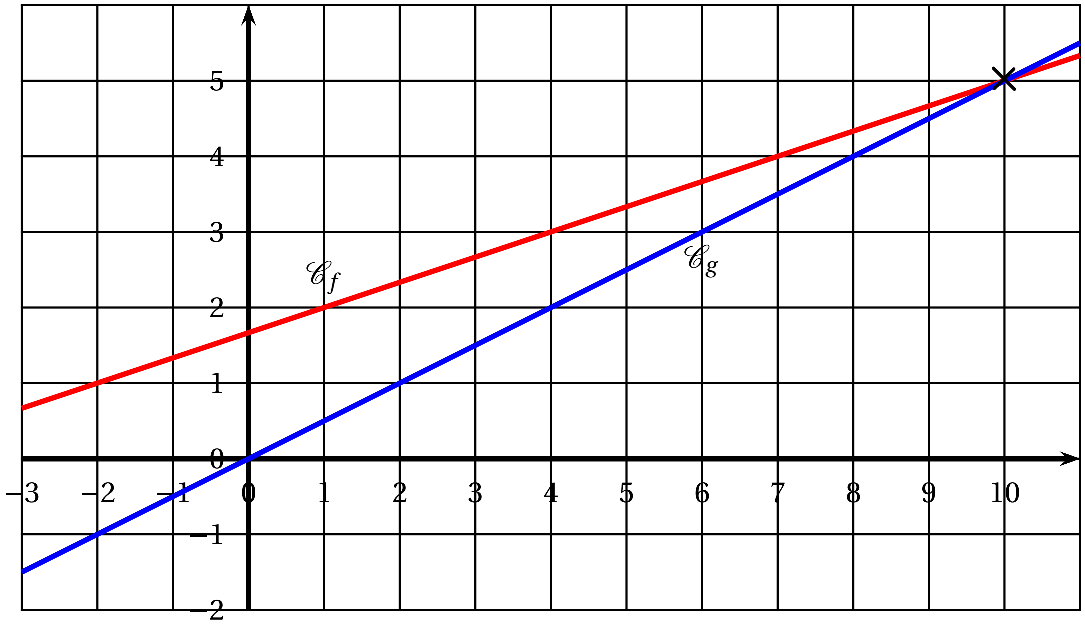
1. Représentons dans un même repére les fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{3} \text{ et } g(x) = -\frac{1}{2}x.$$

   Remarquons que $f(x) = \frac{x+5}{3}$.
   Tableaux de valeurs :

x	1	4
$f(x)=\dfrac{x+5}{3}$	2	3

x	0	4
$g(x)=\dfrac{1}{2}x$	0	2



2. Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes :

   (a) $f(x)=0$ équivaut à $\dfrac{x+5}{3}=0$ donc $x+5=0$ d'où $x=-5$: $\boxed{\mathscr{S}=\{-5\}}$

   (b) $f(x)=g(x)$ équivaut à $\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{x}{2}$ donc $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{5}{3}$.
   Donc : $\dfrac{2x-3x}{6}=-\dfrac{5}{3}$ c'est-à-dire $-\dfrac{x}{6}=-\dfrac{5}{3}$.
   Alors : $x=-6\times\left(\dfrac{5}{3}\right)=10$; $\boxed{\mathscr{S}=\{10\}}$

   (c) $f(x)\geqslant g(x)$ donne, d'après ce qui précède, $x\geqslant 10$; $\boxed{\mathscr{S}=[10\,;\,+\infty[}$

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ pour $x\geqslant 10$.

Exercice III

Étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x)=3x+7$

$3x+7=0$ pour $x=-\dfrac{7}{3}$. Le coefficient directeur de f est $3>0$, donc f est croissante.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	=	

b) $g(x)=-11x+3$.

$-3x+11=0$ donne $-3x=-11$ d'où $x=\dfrac{11}{3}$. Le coefficient directeur est $-11<0$, donc g est décroisante.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\dfrac{11}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice IV

f est une fonction affine dont on donne le tableau de signes ci-dessous ;

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

a) On a $\boxed{f(-2)=0}$.

b) $3 \in]-2\,;\,+\infty[$ et $f(x)>0$ sur cet intervalle donc $\boxed{f(3)>0}$

c) $-10 \in]-\infty\,;\,-2[$ et $f(x)<0$ sur cet intervalle donc $\boxed{f(-10)<0}$

d) $\boxed{f(0)>0}$ car $0>-2$

Exercice V

En France, les températures sont mesurées en degrés Celsius (˚C).

Les pays anglo-saxons utilisent le degré Fahrenheit (˚F).

La fonction f qui, à une température x en degrés Celsius, associe cette température en degrés Fahrenheit est une fonction affine telle que : 0˚C = 32 ˚F et 100˚C = 212˚F.

1. f est affine donc il existe m et p tels que $f(x)=mx+p$.
   $f(0)=32$ donc $m\times 0+p=32$ d'où $\boxed{p=32}$.
   On en déduit : $f(x)=mx+32$.
   $f(100)=212$ donc $100m+32=212$ donc $100m=180$ et $m=\dfrac{180}{100}=\dfrac{9}{5}$.
   On a : $\boxed{f(x)=\dfrac{9}{5}x+32}$
2. g est affine donc $g(x)=m'x+p'$.
   $\begin{cases} g(32)=0 \\ g(212)=100 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 32m'+p'=0 \\ 212m'+p'=100 \end{cases}$.
   En soustrayant les deux lignes, il vient :
   $212m'-32m'=100$ donc $180m'=100$ d'où $m'=\dfrac{100}{180}=\dfrac{5}{9}$.
   Alors : $g(x)=\dfrac{5}{9}x+p'$.
   $g(32)=0$ équivaut à $\dfrac{5}{9}\times 32+p'=0$ donc $p'=-\dfrac{160}{9}$.
   Donc : $g(x)=\dfrac{5}{9}x-\dfrac{160}{9}=\boxed{\dfrac{5x-160}{9}}$
3. $f(25)=\dfrac{9}{5}\times 25+32=45+32=77$ donc 25 ˚C=77 ˚F.
   25 ˚C est une température plus élevée que 75 ˚F.