Correction du TD n° 10 : fonctions affines (1)

Exercice I

Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles de fonctions affines ? linéaires ? On précisera alors leurs coefficients directeurs et leurs ordonnées à l'origine.

a) $f(x) = \sqrt{5}x - \frac{1}{7}$.
$\sqrt{5}x - \frac{1}{7} = mx + p$ avec $m\sqrt{5}$ et $p = -\frac{1}{7}$ donc f est affine.

b) $g(x) = \sqrt{3x+5}$; $g(x) \neq mx+p$ donc g n'est pas affine (et g n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car $3x+5<0$ pour $x < -\frac{5}{3}$; or une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$).

c) $h(x) = \pi x$; h est linéaire car $\pi x = mx + p$ avec $m = \pi$ et $p = 0$

d) $k(x) = \frac{1-3x}{2x-5}$; $k(x) \neq mx+p$ donc k n'est pas affine (d'ailleurs, k n'est pas définir sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur s'annule en $\frac{5}{2}$)

e) $\ell(x) = 2(x-\sqrt{7}) - 2x$: $\ell(x) = \cancel{2x} - 2\sqrt{7} - \cancel{2x} = 2\sqrt{7}$.
ℓ est une fonction constante, donc affine, avec un coefficient directeur $m = 0$ et $p = 2\sqrt{7}$.

Exercice II

Soit $f : x \mapsto 13x - 7$ une fonction affine.

1. L'image de 3 par f est $f(3) = 13 \times 3 - 7 = 39 - 7 = \boxed{32}$.
2. Un antécédent de 5 par f est un nombre x tel que $f(x) = 5$.
   $f(x) = 5$ donne $13x - 7 = 5$ donc $13x = 12$ d'où $\boxed{x = \frac{12}{13}}$.
   L'antécédent de 5 par f est $\frac{12}{13}$.

Exercice III

Soit $f : x \mapsto \frac{3}{7}x - 4$.

- $f(0) = \frac{3}{7} \times 0 - 4 = 0 - 4 = \boxed{-4}$
- $f(7) = \frac{3}{\cancel{7}} \times \cancel{7} - 4 = 3 - 4 = \boxed{-1}$
- $f(21) = \frac{3}{7} \times 21 - 4 = \frac{3 \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{7}} - 4 = 9 - 4 = \boxed{5}$
- $f(5) = \frac{3}{7} \times 5 - 4 = \frac{15}{7} - 4 = \frac{15}{7} - \frac{28}{7} = \frac{15-28}{7} = \boxed{-\frac{13}{7}}$

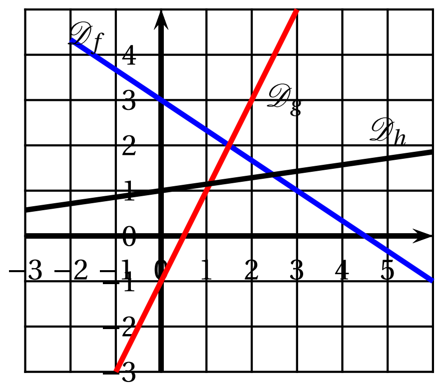
Exercice IV

Soit la fonction affine $f : x \mapsto 3x - 5$.

- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3 \times \dfrac{3}{2} - 5 = \dfrac{9}{2} - 5 = \dfrac{9}{1} - \dfrac{10}{2} = \dfrac{9-10}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.
- $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \cancel{3} \times \dfrac{1}{\cancel{3}} - 5 = 1 - 5 = \boxed{-4}$
- $f(0) = 3 \times 0 - 5 = 0 - 5 = \boxed{-5}$
- $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = 3 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) - 5 = -\cancel{3} \times \dfrac{4}{\cancel{3}} - 5 = -4 - 5 = \boxed{-9}$

Exercice V

Ci-dessous sont représentées trois fonctions affines f, g et h, dont les droites représentatives sont $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$.



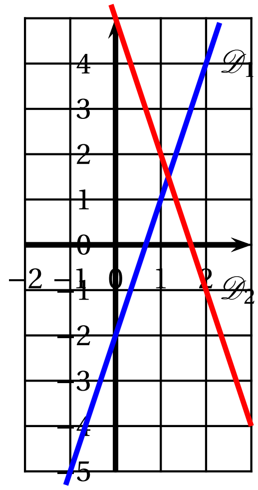
- L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}_f$ est 3.
- L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}_g$ est -1.
- L'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}_h$ est 1.

Exercice VI

Déterminer la fonction linéaire f telle que :
$f(3) = 4$.
Puisque f est linéaire, il existe m tel que $f(x) = mx$.
$f(3) = 4$ donne $m \times 3 = 4$ donc $m = \dfrac{4}{3}$.
D'où : $\boxed{f(x) = \dfrac{4}{3}x}$.

Exercice VII

Ci-dessous sont représentées les fonctions affines $f : x \mapsto 3x - 2$ et $g : x \mapsto 5 - 3x$ par deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



L'abscisse x du point d'intersection des deux droites vérifie $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $3x - 2 = 5 - 3x$.

$3x - 2 = 5 - 3x$ donne $3x + 3x = 5 + 2$ donc $6x = 7$ qui donne $\boxed{x = \dfrac{7}{6}}$.

L'abscisse du point d'intersection des deux droites est $\dfrac{7}{6}$.

Remarque : si on veut calculer son ordonnée, on peut prendre n'importe laquelle des deux fonctions.

- $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 3 \times \dfrac{7}{6} - 2 = \dfrac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3} \times 2} - 2 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{4}{2} = \dfrac{3}{2}$
- $g\left(\dfrac{7}{6}\right) = 5 - 3 \times \dfrac{7}{6} = 5 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{10 - 7}{2} = \dfrac{3}{2}$