2nde : correction de l'AP nº 7 du 7 octobre

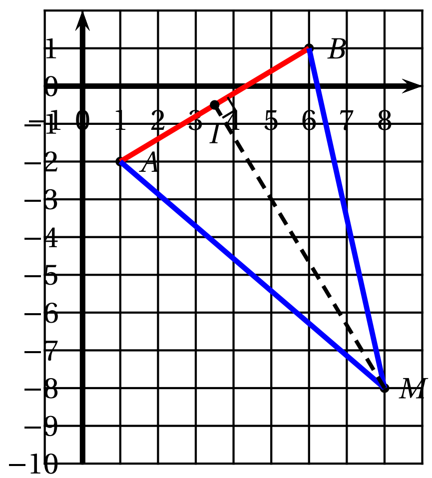
I

Soient $A(5\,;\,8)$ et $B(2\,;\,-6)$.
Soit M le milieu de $[AB]$.
$M\left(\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $M\left(\dfrac{5+2}{2}\,;\,\dfrac{8+(-6)}{2}\right)$, d'où $\boxed{M\left(\dfrac{7}{2}\,;\,1\right)}$

II

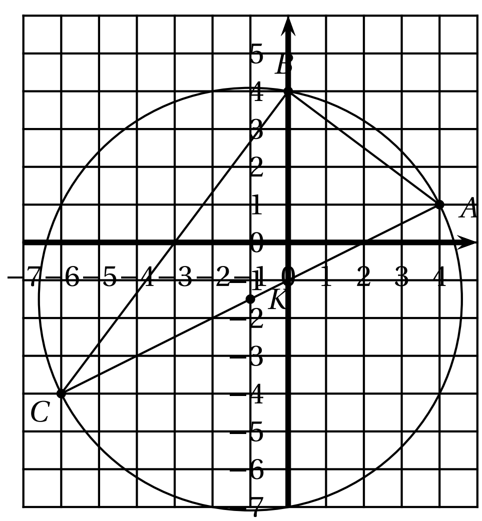
Soient $A(1\,;\,-2)$, $B(6\,;\,1)$ et $M(8\,;\,-8)$.

1.
   - $AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=\sqrt{(8-1)^2+(-8-(-2))^2}=\sqrt{7^2+(-6)^2}=\boxed{\sqrt{85}}$
   - $BAM=\sqrt{(x_M-x_B)^2+\left(y_M-y_B\right)^2}=\sqrt{(8-6)^2+(-8-1)^2}=\sqrt{2^2+(-9)^2}=\boxed{\sqrt{85}}$
2. $AM=BM$ donc M est équidistant de A et de B : M appartient à la médiatrice de $[AB]$ (droite qui coupe perpendiculairement $[AB]$ en son milieu)



III

Placer les points A(4 ; 1) ; B(0 ; 4) ; C (-6 ; -4)

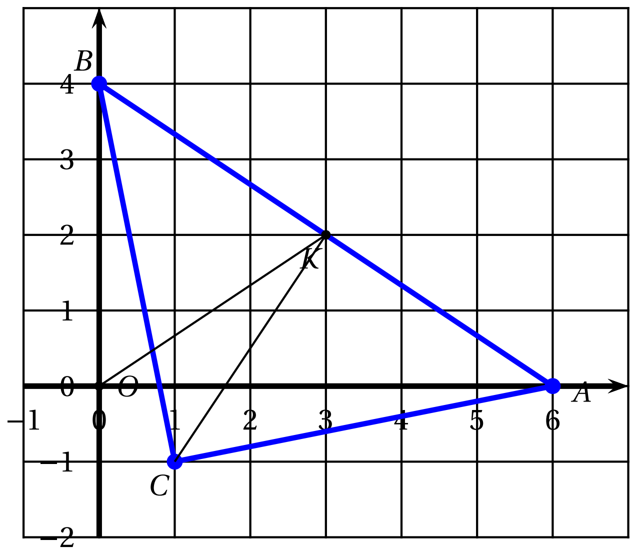


1. • $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$
   • $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{(-6-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = \boxed{10}$
   • $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2} = \sqrt{(-6-4)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \boxed{5\sqrt{5}}$
   • On a $AC^2 = 125$ et $AB^2 + BC^2 = 25 + 100 = 125$.
     Par conséquent $= AC^2 = AB^2 + BC^2$.
     D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
2. Le centre K du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse $[AC]$

IV

Dans le repère orthonormé (O ; I ; J) on considère les points suivants : $A(6\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 4)$ et $C(1\ ;\ -1)$.

1. Figure :



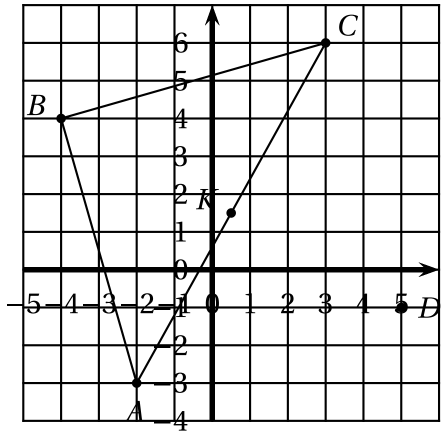
2. • Calcul de AB : $AB = \sqrt{(0-6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{36+16} = \boxed{\sqrt{52}}$
   • Calcul de BC : $BC = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$
   • Calcul de AC : $AC = \sqrt{(1-6)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \boxed{\sqrt{26}}$
   • $AB^2 = 52$ et $BC^2 + AC^2 = 26 + 26 = 52$ donc $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
     D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.
3. On appelle K le milieu du segment $[AB]$.

   (a) $K\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc $K\left(\dfrac{6+0}{2}\ ;\ \dfrac{0+4}{2}\right)$ d'où $\boxed{K(3\ ;\ 2)}$

   (b) • $OK = \sqrt{(x_K - x_O)^2 + \left(y_K - y_O\right)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\boxed{OK = \sqrt{13}}$
       • $CK = \sqrt{(x_K - x_C)^2 + \left(y_K - y_C\right)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $\boxed{CK = \sqrt{13}}$
       • $OK = CK$ donc K appartient à la médiatrice de $[CK]$.

V

Placer les points A(-2 ; -3) ; B(-4 ; 4) ; C (3 ; 6).



1. • $AB = \sqrt{(-4-(-2))^2+(4-(-3))^2} = \sqrt{(-2)^2+7^2} = \sqrt{53}$
   • $BC = \sqrt{(3-(-4))^2+(6-4)^2} = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53}$
   • $AC = \sqrt{(3-(-2))^2+(6-(-3))^2} = \sqrt{5^2+9^2} = \sqrt{106}$
   • $AC^2 = 106$; $AB^2 + BC^2 = 106$. Donc $\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
2. Soit K le milieu du segment $[AC]$. $K\left(\dfrac{x_A+x_C}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_C}{2}\right)$ donc $K\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$
3. Soit D le symétrique de B par rapport à K. K est donc le milieu de [BD].
   $\begin{cases} x_K = \dfrac{x_B+x_D}{2} \\ y_K = \dfrac{y_B+y_D}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{-4+x_D}{2} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{4+y_D}{2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 1 = -4+x_D \\ 3 = 4+y_D \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_D = 1+4 = 5 \\ y_D = 3-4 = -1 \end{cases}$ donc $\boxed{D(5\,;\,-1)}$
4. Par construction, les diagonales $[BD]$ et $[AC]$ du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu, K.
   $ABCD$ est donc un parallélogramme.
   De plus, le triangle ABC est rectangle en B : $ABCD$ est un parallélogramme avec un angle droit, donc c'est un rectangle.
   Or, $AB = BC$ donc ce rectangle est un carré. $\boxed{\text{ABCD donc un carré}}$.