Correction du TD nº 25 (inéquations)

a) $(-2x+1)(6x+5)>0$

- Étude du signe de $(-2x+1)$:
  $-2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
  $-2x+1>0 \Leftrightarrow -2x>-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$ (l'inégalité change de sens car on divise par -2, négatif).
- Étude du signe de $6x+5$:
  $6x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{6}$
  $5x+5>0 \Leftrightarrow 6x>-5 \Leftrightarrow x>-\frac{6}{5}$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $6x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(-2x+1)(6x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Conclusion** : le produit est Strictement positif sur $\left]-\frac{5}{6}\,;\,\frac{1}{2}\right[$: $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\frac{5}{6}\,;\,\frac{1}{2}\right[}$

b) $(2-3x)(4x-1)\leqslant 0$

- Étude du signe de $2-3x$:
  $2-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$
- $x: x\mapsto 2-3x$ est une fonction affine décroissante puisque le coefficient directeur -3 est négatif.
  Elle prend d'abord des valeurs positives puis négatives, donc $2-3x>0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$
- Étude du signe de $4x-1$.
  $4x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$
  $4x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$ (en résolvant l'inéquation en regardant le signe de la fonction affine croissante)
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(2-3x)(4x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[}$

c) $(5x-3)(2x+1)>(2x+1)(x-4)$

- $(5x-3)(2x+1)>(2x+1)(x-4) \Leftrightarrow (5x-3)(2x+1)-(2x+1)(x-4)>0$
  $\Leftrightarrow (2x+1)\,[(5x-3)-(x-4)]>0$
  $\Leftrightarrow (2x+1)(4x+1)>0$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[}$

d) $\dfrac{3x-4}{2x+3}\geqslant 0$ (trouver d'abord l'ensemble de définition)

- La valeur interdite est $x=-\frac{3}{2}$ donc l'ensemble de définition est $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$
- On renseigne un tableau de signes comme pour un produit; il faut juste faire attention à la valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	
$\dfrac{3x-4}{2x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$		$+$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\cup\left[\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[}$

e) $\dfrac{1-4x}{x-3}\leqslant -3$

- La valeur interdite est 3.
- Pour $x\neq 3$, $\dfrac{1-4x}{x-3}\leqslant -3 \Leftrightarrow \dfrac{1-4x}{x-3}+3\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-4x+3(x-3)}{x-3}<0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-8}{x-3}<0$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-8		3		$+\infty$
$-x-8$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$x-3$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$\dfrac{-x-8}{x-3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

- **Conclusion** : $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-8]\cup]3\,;\,+\infty[}$