

Racine carrée d'un nombre positif

Table des matières

I	Définition	1
II	Racine carrée d'un produit ou d'un quotient	2
III	Simplification d'écriture	2
IV	Racine carrée et géométrie	3
IV.1	Diagonale d'un carré	3
IV.2	Diagonale d'un cube	3
IV.3	Hauteur d'un triangle équilatéral	4
V	Équation $x^2 = b$	4
VI	Comparaison de deux racines carrées	4
VII	Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction	5

I Définition



Définition

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté \sqrt{a} , dont le carré vaut a .

$$\text{Autrement dit : } \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \geq 0 \\ \sqrt{a^2} = a \end{cases}$$

Exemples :

- $\sqrt{9} = 3$ car $3 > 0$ et $3^2 = 9$.
- $\sqrt{25} = 5$ car $5 > 0$ et $5^2 = 25$.
- $\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (on ne peut pas écrire ce nombre de manière plus simple); $\sqrt{2} > 0$ et $\sqrt{2^2} = 2$ par définition.
- $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.
- $\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$.
- $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ (\triangleleft il ne faut pas simplifier trop vite; la racine carrée d'un nombre est un nombre positif).

II Racine carrée d'un produit ou d'un quotient



Propriété

Soient deux nombres a et b positifs.

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $b \neq 0$

Démonstration :

- $\sqrt{ab^2} = ab$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = ab$.

\sqrt{ab} et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont deux nombres positifs dont le carré est ab donc ces deux nombres sont égaux par définition de la racine carrée d'un nombre.

- De même : $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$ et $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b}$ donc $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

⚠ : **Remarque** : il n'y a pas de règle de calcul pour la racine carrée d'une somme.

Pour a et b positifs, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Par exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ donc $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

III Simplification d'écriture



Propriété

Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$

En effet : $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = a\sqrt{b}$.

Exemples :

1. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \boxed{5\sqrt{3}}$

2. $\sqrt{288} = \sqrt{2 \times 144} = \sqrt{2 \times 2 \times 72} = \sqrt{4 \times 72} = \sqrt{4 \times 9 \times 8} = \sqrt{4 \times 9 \times 4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 2}$
 $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} = \boxed{12\sqrt{2}}$.

3. $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

Remarque : pour simplifier l'écriture de la racine carrée d'un nombre, on essaye d'écrire ce nombre sous la forme a^2b , avec a le plus grand possible.

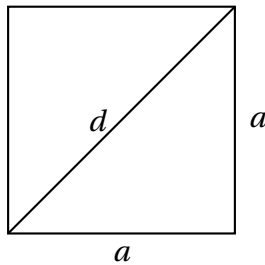
IV Racine carrée et géométrie

IV.1 Diagonale d'un carré

Propriété

La diagonale d'un carré de côté a a une longueur égale à $d = a\sqrt{2}$.

Démonstration



La diagonale tracée sépare le carré en deux triangles rectangles isocèles.

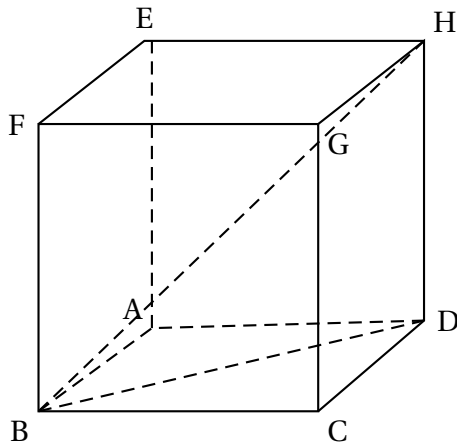
D'après le théorème de Pythagore, on a $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ d'où $d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

IV.2 Diagonale d'un cube

Propriété

La diagonale d'un cube de côté a pour longueur $d = a\sqrt{3}$.

Démonstration :



On considère la diagonale [BD] de la face ABCD et la diagonale du cube [BH].

Le triangle BDH est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$BH^2 = BD^2 + DH^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ d'où

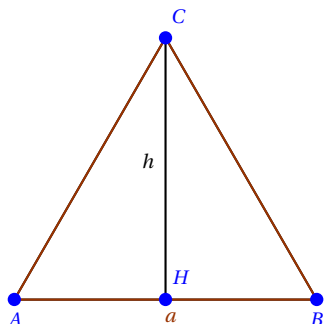
$BH = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

IV.3 Hauteur d'un triangle équilatéral

Propriété

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut : $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

Démonstration :



ABC est équilatéral de côté a ; on trace la hauteur $[CH]$ de longueur h .

Comme ABC est équilatéral, la hauteur $[CH]$ est aussi une médiane donc $AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Le triangle CAH est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore, $CH^2 = AC^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.

On en déduit : $h = CH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

V Équation $x^2 = b$

On considère l'équation $x^2 = b$.

Propriété

- Si $b < 0$, l'équation $x^2 = b$ n'a pas de solution (car un carré ne peut pas être négatif).
- Si $b = 0$, l'équation $x^2 = b$ a pour solution $x = 0$.
- Si $b > 0$, l'équation $x^2 = b$ a deux solutions : $x = -\sqrt{b}$ et $x = \sqrt{b}$

Exemples :

1. l'équation $x^2 = 36$ a deux solutions : $x = -\sqrt{36} = -6$ et $x = \sqrt{36} = 6$: $\mathcal{S} = \{-8; 6\}$

2. l'équation $x^2 = 7$ a pour solutions $x = -\sqrt{7}$ et $x = \sqrt{7}$: $\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

VI Comparaison de deux racines carrées

Propriété

Si a et b sont deux nombres positifs, \sqrt{a} et \sqrt{b} sont classés dans le même ordre que a et b .

Si $a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, alors $a < b$.

Démonstration :

On utilise la relation $b - a = \sqrt{b^2} - \sqrt{a^2} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$.

- On suppose $a < b$ donc $b - a > 0$; $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ comme somme de nombres positifs, donc $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$ car le produit de deux nombres positifs est positif.
- De même, si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ (somme de deux nombre spositifs) donc $b - a > 0$ d'où $a < b$.

Exemple : comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$.

On a : $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$.

$12 < 18$ donc $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ d'où : $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

VII Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction

On évite de laisser une racine carrée au dénominateur d'une fraction.

On a deux cas :

- On a une expression du type $\frac{a}{\sqrt{b}}$; on multiplie alors numérateur et dénominateur par \sqrt{b} :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

- On a une expression du type $\frac{a}{b + \sqrt{c}}$; on multiplie numérateur et dénominateur par l'**expression conjuguée** du dénominateur (meme expression dans laquelle on remplace + par -, ou réciproquement).

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - \sqrt{c}^2} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}$$

Exemples :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = \frac{5(2 - \sqrt{3})}{1} = 5(2 - \sqrt{3})$$