# Vecteurs et translations (première partie)

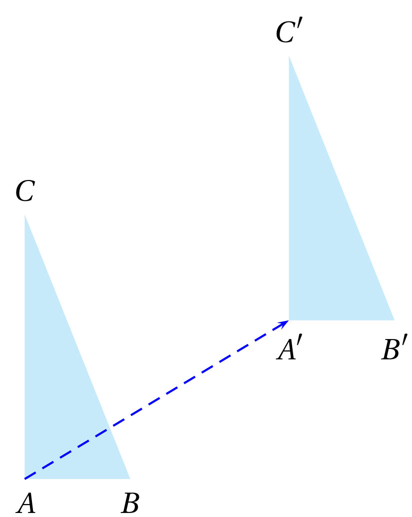
## Table des matières



### Activité 1 page 196

## I Translations

On considère un triangle $ABC$. On le déplace en le faisant glisser de façon à ce qu'il garde la même orientation par rapport à la feuille de papier ou au tableau. Le sommet A vient en A', B vient en B' et C vient en C'.




On dit qu'on a effectué une **translation** du triangle.
Faire subir une **translation** à un objet revient à le faire glisser en **gardant la même orientation**.

## II Vecteur d'une translation

**Remarque :** Dire qu'on a fait glisser la figure ou qu'on lui a fait subir une translation est **insuffisant**. On ne sait pas où la figure arrive !
Il faut préciser davantage.

> **Définition**
>
> En fait, puisque la figure reste inchangée et qu'elle garde la même orientation, il suffit de préciser le déplacement d'un **seul** point de la figure.
> Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le triangle $A'B'C'$.
> On dit que l'on a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

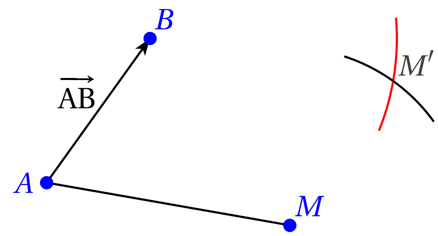
**Remarque :** on aurait pu dire que B allait en en B' ou C en C'. La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$.
**Représentation** : Si $A \neq A'$, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se représente par une flèche d'origine A et d'extrémité A'.

> **Vocabulaire**
>
> Deux droites ont la même **direction** lorsqu'elles sont parallèles.
> Deux voitures qui roulent sur une même route rectiligne vont dans la même direction ; elles peuvent aller dans le même **sens** ou dans des **sens** contraires. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** AB.

> **Définition**
>
> L'image d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un point M' tel que :
> - les droites (AA') et (MM') ont la même **direction** (c'est à dire sont parallèles) ;
> - les demi droites [AA') et [MM') ont le même **sens** ;
> - les segments [AA'] et [MM'] ont la même longueur ; AA' = MM'

L'image $M'$ d'un point $M$ par une translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ se construit au compas. En effet, $ABM'M$ est alors un parallélogramme, donc $AB = MM'$ et $AM = BM'$.

On trace l'arc de cercle de centre B et de rayon AC (car nous devons avoir $AC = BD$).
On trace l'arc de cercle de centre C et de rayon AB (car nous devons avoir $CD = AB$).



## III Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils correspondent à la même translation.
D'après ce qu'on a vu auparavant, on en déduit la définition suivante ;

### Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

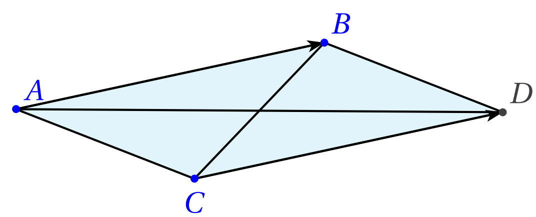
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens :
- les longueurs AB et CD sont égales.

On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Soient deux vecteurs **égaux** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. D'après ce qu'on a vu, les segments [AB] et [CD] sont alors parallèles et de même longueur : on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Remarque : sur la figure du I, on a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

### Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC et un parallélogramme (éventuellement aplati).
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu.




**Remarque :** si l'on ne veut pas préciser les extrémités du vecteur, on lui donne un nom avec une seule lettre, par exemple le vecteur $\overrightarrow{u}$.

### Propriétés

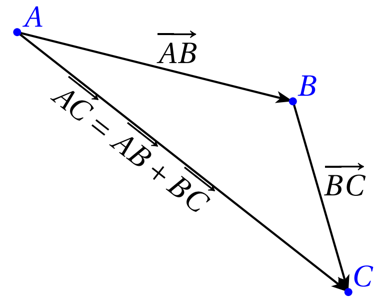
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si B = C.
- K est le milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

**Exercice :** Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $DC$ ? Y a-t-il un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ ?
3. Conclure.

## IV Somme de deux vecteurs

Le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On applique **successivement** les deux translations. Cela revient à n'en appliquer qu'une seule (on va directement de A en C, sans passer par B). Cette translation qui permet de passer de A en C est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Ainsi définit-on une définition sur les vecteurs.



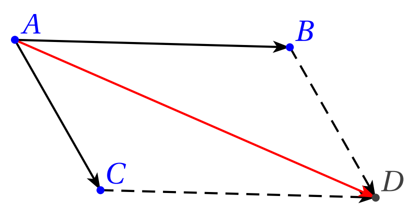

**Propriété (relation de Chasles)**

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

*Michel Chasles, né le 15 novembre 1793 à Épernon en Eure-et-Loir et mort le 18 décembre 1880 à Paris, est un mathématicien français, spécialisé en géométrie, notamment projective.*
*Pour plus de précisions cliquer ici*

**Remarque** : Le segment d'extrémités A et C est la diagonale du parallélogramme dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux côtés consécutifs.

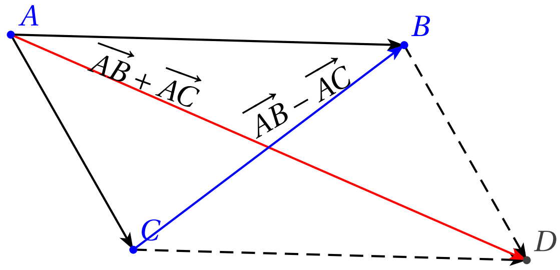
**Somme de deux vecteurs de même origine** : On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.




On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir AB = CD et AC = BD. Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (**relation de Chasles**).

**Remarque** : En appliquant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$, qui laisse tous les points immobiles; on parle alors de translation de **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots = \overrightarrow{0}$.
Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$, par analogie avec l'addition sur les nombres, on pose $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}}$.

**Exemple :** Soit ABDC un parallélogramme. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. On voudrait représenter également $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.

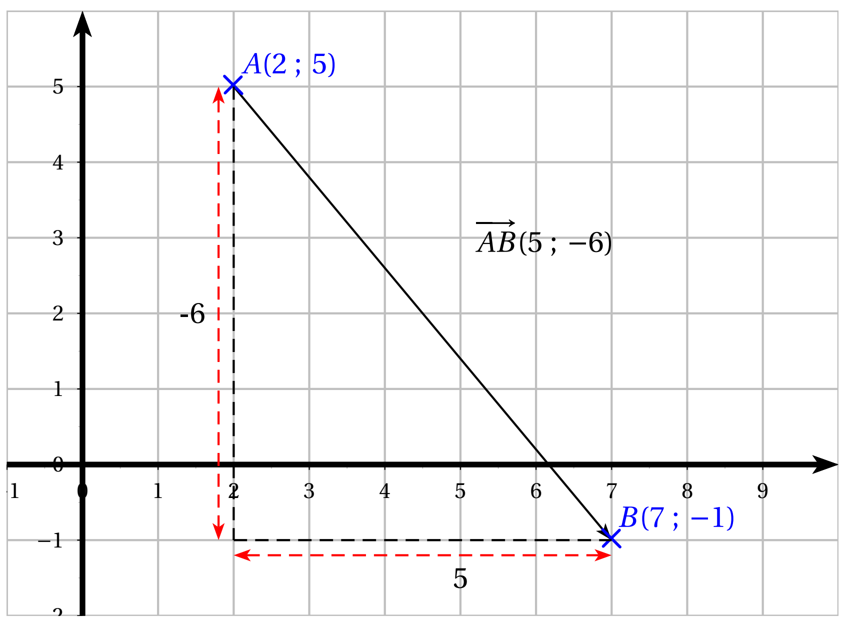



## V Coordonnées d'un vecteur

**Définition**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ un repère quelconque. Soient deux points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ et l'on écrit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque : Les coordonnées d'un vecteur servent à savoir de combien d'unités on se déplace parallèlement à chaque axe.




**Remarque :** deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

**Application** : Déterminer les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme :
Soient A(2; 3) , B( 3; 4) et C( 5; 6). On cherche les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.
ABCD est un parallélogramme si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
On note $D\left(x_D\,;\,y_D\right)$ les coordonnées de $D$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 6 - y_D \end{pmatrix}$. On obtient un système de deux équations :

$$\begin{cases} 5 - x_D = 1 \\ 5 - x_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \end{cases}.$$

$D$ a pour coordonnées $\boxed{D(4\,;\,5)}$

## VI Longueur d'un segment

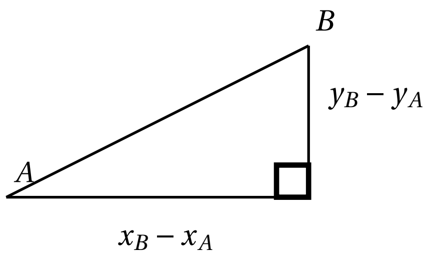
**Propriété**

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ un repère **orthonormal**. Soient A$\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et B$\left(x_B\,;\,y_B\right)$. Alors :

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

**Démonstration :** Cette formule vient de l'application du théorème de Pythagore.

**Remarque** : $(x_1-x_B)$ et $\left(y_B-y_A\right)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.




En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve : $AB^2=(x_N-x_A)^2+\left(y_B-y-A\right)^2$ d'où la formule.

**Remarque** : elle convient quelles que soient les positions de $A$ et $B$ puisque l'on calcule les carrés des différences des coordonnées.

**Exemple :** $A(2\,;\,-5)$ et $B(-7\,;\,1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$ donc : $AB=\sqrt{(-9)^2+6^2}=\sqrt{81+36}=\boxed{\sqrt{117}}$