Vecteurs (deuxième partie)

Table des matières

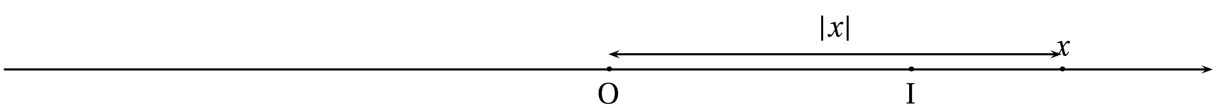
I Valeur absolue d'un nombre

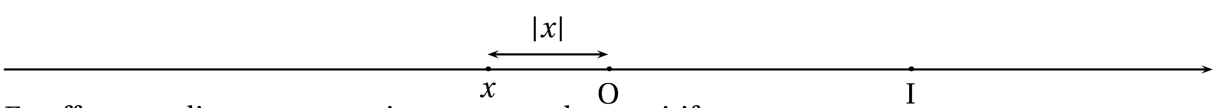
Définition

Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x, le nombre noté $|x|$, défi par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Exemples : $|3| = 3$; $|-7| = -(-7) = 7$; $|0| = 0$

Interprétation graphique : sur la droite gradués (droite des réels), $|x|$ est la distance de x à 0.

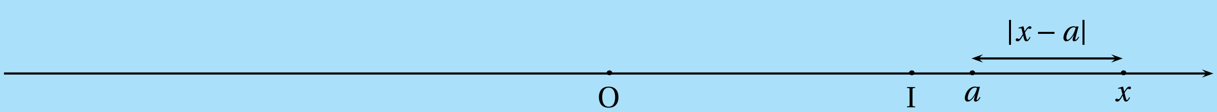




En effet, une distance est toujours un nombre positif.

Définition et propriété

- Soit a, x et r des nombres avec $r \geqslant 0$.
  On appelle distance entre a et x le nombre $|a - x|$.
  Remarque : $|a - x| = |x - a|$.



- $x \in [a - r\ ;\ a + r]$ si, et seulement si, $|x - a| \leqslant r$.

II Multiplication d'un vecteur par un réel

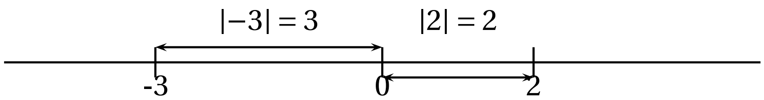
Rappel

Soit k un réel. On note $|k|$ (« se lit valeur absolue de k »), le nombre défini par :

- $|k| = k$ si $k > 0$
- $|k| = -k$ si $k < 0$

.
$|k|$ est donc toujours un nombre positif et représente la distance de k à l'origine sur une droite graduée.

Exemples :
$|2| = 2$ car 2>0
$|-3| = -(-3) = 3$ car $-3 < 0$



Notation

La norme (« longueur ») d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ se note $||\overrightarrow{u}||$.

Remarque : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

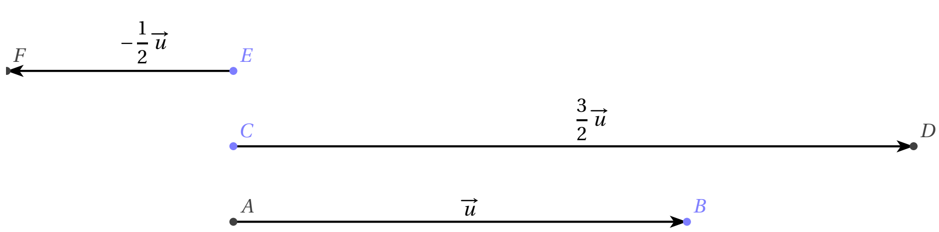
Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et soir k un réel non nul.

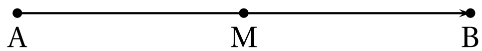
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$, $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ ont le même sens. Si $k < 0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La norme de $k\overrightarrow{u}$ est $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.
  $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Exemple :



Remarque : si M est le milieu d'un segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Propriétés

Pour tous réels k et k', pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $k\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $k\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $k=0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

III Colinéarité de deux vecteurs

III.1 Définition

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque : deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

III.2 Caractérisation par les coordonnées

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\,\widehat{xy}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le nombre $\text{dét}\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right) = x'y - x'y$.

Remarque : les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est $\text{dét}\left(\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{AD}\right)$.

Propriété

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\text{dét}\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=0$.

Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}14\\35\end{pmatrix}$.
$\text{dét}\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)=2\times 35-5\times 14=0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
Il est d'ailleurs évident que $\vec{v}=7\vec{u}$ (coordonnées proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité égal à 7).

IV Parallélisme et alignement

IV.1 Droites parallèles

Propriété

Soient quatre points A, B, C et D distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Justification : les deux droites sont parallèles signifie qu'elles ont la même direction, donc les deux vecteurs ont la même direction donc donc sont colinéaires.

Exemple : soient $A(2\,;\,3)$, $B(10\,;\,5)$, $C(4\,;\,6)$ et $D(8\,;\,7)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
Il est clair que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires : les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

IV.2 Points alignés

Propriété

Trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecrteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$).

Exemple : soient $A(2\,;\,3)$, $B(10\,;\,5)$ et $E(30\,;\,10)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ (exemple précédent).
$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}28\\7\end{pmatrix}$.
$\text{dét}\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)=8\times 7-2\times 28=0$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
Les trois points A, B et E sont donc alignés.