

Inéquations

Table des matières

I	Comparaison de deux nombres	1
II	Règle de l'addition et soustraction	1
III	Règles de la multiplication et division	1
IV	Les inéquations du premier degré à une inconnue	2
V	Méthode de résolution	2
VI	Signe de $ax + b$	2
VII	Signe d'un produit de binômes	3
VIII	Résolution d'une inéquation-quotient	4

I Comparaison de deux nombres



Propriété

$$| \quad a < b \Leftrightarrow b - a > 0$$

Pour comparer deux nombres (c'est-à-dire savoir lequel est le plus grand), on étudie le signe de la différence.

Quelques règles sur les inégalités

II Règle de l'addition et soustraction



Règle 1

Soient a , b et c trois réels alors :

- $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
- $a \leq b \Leftrightarrow a - c \leq b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2x + 4 - 4 \leq 0 - 4 \Leftrightarrow 2x \leq -4$
- $3x - 2 < -3 \Leftrightarrow 3x - 2 + 2 < -3 + 2 \Leftrightarrow 3x < -1$

III Règles de la multiplication et division



Règle 2

Soient a , b deux réels et c un réel **positif** alors :

- $a \leq b \Leftrightarrow a \times c \leq b \times c$
- $a \leq b$ et $c \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Démonstration : puisque $a \leq b$: $b - a \geq 0$.

Pour comparer les deux nombres, on étudie le signe de leur différence :

Alors $bc - ac = c(b - a) \geq 0$ car $b - a \geq 0$ et $a \geq 0$, donc $ac \leq bc$.

De même : $\frac{b}{c} - \frac{a}{c} = \frac{b-a}{c} \geq 0$. Puisque $b - a \geq 0$ et $c \geq 0$ donc $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Exemples :

- $2x > 7 \Leftrightarrow 2x \times 3 > 7 \times 3 \Leftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$
- $x\sqrt{2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Règle n° 3

Soient a, b deux réels et c un réel négatif ou nul alors :

- $a \leq b \Leftrightarrow a \times c \geq b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)
- et $a \leq b$ et $c < 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Même démonstration que dans le cas $c \geq 0$.

Exemples :

- $-x > 4 \Leftrightarrow -x \times (-1) < 4 \times (-1) \Leftrightarrow x < -4$
- $-4x < -3 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{-3}{-4} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$
- $-2x \geq 6 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x \leq -3$

IV Les inéquations du premier degré à une inconnue

V Méthode de résolution

- $x + a \leq b \Leftrightarrow x + a - a \leq b - a \Leftrightarrow x \leq b - a$
- $x - a \leq b \Leftrightarrow x - a + a \leq b + a \Leftrightarrow x \leq b + a$
- Si $a > 0$: $ax \leq b \Leftrightarrow \frac{ax}{a} \leq \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a}$
- Si $a < 0$: $ax \leq b \Leftrightarrow \frac{ax}{a} \geq \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}$
- Si $a > 0$: $\frac{x}{a} \leq b \Leftrightarrow \frac{x}{a} \times a \leq b \times a \Leftrightarrow x \leq ab$
- Si $a < 0$: $\frac{x}{a} \leq b \Leftrightarrow \frac{x}{a} \times a \geq b \times a \Leftrightarrow x \geq ab$

VI Signe de $ax + b$

On considère la fonction affine $f = x \mapsto ax + b$.

Si $a > 0$, la fonction est croissante et si $a < 0$, la fonction est décroissante.

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

On en déduit le signe de $ax + b$:

Cas $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

Cas $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

VII Signe d'un produit de binômes

On appelle binôme une expression du type $ax + b$ (ou polynôme du premier degré).



Propriété fondamentale

- Le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif

Méthode :

Pour étudier le signe d'une produit de binômes :

- on étudie le signe de chacun d'entre eux,
- on récapitule tout cela dans un tableau de signes (une ligne par binôme)
- puis dans la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle en appliquant la règle sur le signe d'un produit.

Exemple : étudions le signe de $A(x) = -x(2x - 3)(x + 6)(4 - 2x)$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des quatre binômes de $A(x)$:
- $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ et $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$
- $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ et $x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -6$
- $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $4 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$ (en divisant par -2 qui est négatif, d'où le changement de sens de l'inégalité)
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$	-6	0	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$-x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$4 - 2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0

• **Conclusion :**

$$A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -6[\cup]0; \frac{3}{2}[\cup]2; +\infty[$$

$$A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-6; 0[\cup \frac{3}{2}; 2[$$

VIII Résolution d'une inéquation-quotient

Exemple 1 : Résoudre $\frac{-3x+7}{2x+3} \leq 0$.

- **Ensemble de définition :** on ne peut pas diviser par 0, donc le dénominateur $2x+3$ doit être non nul.

Or, $2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

On en déduit que l'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

- On cherche alors le signe de chaque facteur :

◇ $-3x+7=0 \Leftrightarrow -3x=-7 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$.

$-3x+7 > 0 \Leftrightarrow -3x > -7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$.

◇ $2x+3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$

- Reste à renseigner un tableau de signes.

⚠ **Attention**, il y a une valeur interdite, qu'on code avec une double barre en dessous de $-\frac{3}{2}$ dans le tableau

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
Signe de $-3x+7$	+	-	-	
Signe de $2x+3$	-	-	+	
Signe de $\frac{-3x+7}{2x+3}$	-	+	-	

- **Conclusion :** on voulait que le quotient fût négatif ou nul : l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right[\cup \left[\frac{7}{3}; +\infty \right[$$

Exemple 2 : résoudre $\frac{7x+5}{x^2-4} \geq 0$.

- **Ensemble de définition :** $x^2-4 = x^2-2^2 = (x+2)(x-2)$ qui s'annule en -2 et 2.

Nous avons donc deux valeurs interdites, -2 et 2.

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

- Signe de $7x+5$

$7x+5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}$.

$x \mapsto 7x+5$ est croissante puisque le coefficient directeur est $7 > 0$ donc $7x+5$ prend d'abord des valeurs négatives puis positives. D'où $7x+5 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{7}$ et $7x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{7}$.

- **Signe de $x+2$:**
 $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ et $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.
- **Signe de $x-2$:**
 $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ et $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.
- **Tableau de signes :**
 Il y a deux valeurs interdites, -2 et 2.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{5}{7}$	2	$+\infty$	
Signe de $7x+5$	-	-	\emptyset	+	+	
Signe de $x+2$	-	+	+	+	+	
Signe de $x-2$	-	-	-	\emptyset	+	
Signe de $\frac{7x+5}{x^2-4}$	-	+	\emptyset	-	\emptyset	+

- **Conclusion :** on veut que le quotient soit positif ou nul.

$$\mathcal{S} = \left] -2; -\frac{5}{7} \right] \cup [2; +\infty[$$