

Équations

Table des matières

I	Définition d'une équation	1
II	Méthode générale de résolution	1
III	Équations du type $x^2 = a$	2
IV	Équation sous forme d'un quotient	3

I Définition d'une équation

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus.
Résoudre cette équation consiste à trouver **toutes** les valeurs que peuvent prendre ce ou ces nombres inconnus pour que l'égalité soit vraie.

Exemples :

- $2x+3=0$ a pour solution le nombre $-\frac{3}{2}$
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 = -1$ est impossible dans \mathbb{R} .

II Méthode générale de résolution

Propriété

1. Propriété : on ne change pas une égalité en additionnant le même nombre aux deux membres de l'égalité ou en multipliant ou en divisant les deux membres par un nombre non nul. (principe d'une balance à plateaux)

2. Équations du premier degré (équations fondamentales) :



- $x + a = b$ équivaut à $x + a - = b -$ dnc $x = b - a$
- $x - a = b$ équivaut à $x - a + = b +$ dnc $x = b + a$
- $ax = b$ (avec $a \neq 0$) équivaut à $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ donc $x = \frac{b}{a}$
- $\frac{x}{a} = b$ équivaut à $\frac{x}{a} \times = b \times$ donc $x = ba$

3. Théorème fondamental (théorème du produit nul) :



Théorème

Dans \mathbb{R} , un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Méthode :

- Sauf cas particulier, on transpose tout du même côté pour se ramener à une équation du type $A(x) = 0$.
- On essaye de factoriser pour utiliser le théorème du produit nul.
Pour cela, on essaye de repérer un facteur commun, sinon, une identité remarquable. S'il n'y a pas de factorisation possible, on développe.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $(3x + 1)(x + 4) = 3x + 1$.

Cette équation est équivalente à $(3x + 1)(x + 4) - (3x + 1) = 0$, soit $(3x + 1)[(x + 4) - 1] = 0$ donc $(3x + 1)(x + 3) = 0$.
 $3x + 1 = 0$ donne $x = -\frac{1}{3}$, $x + 3 = 0$ donne $x = -3$.

L'équation a deux solutions : $\mathcal{S} = \left\{ -3; -\frac{1}{3} \right\}$

(b) Résoudre l'équation : $(2x + 5)^2 = (3x - 2)^2$.

On obtient : $(2x + 5)^2 - (3x - 2)^2 = 0$, soit : $[(2x + 5) + (3x - 2)][(2x + 5) - (3x - 2)] = 0$ qui s'écrit :
 $(5x + 3)(-x + 7) = 0$.

Les solutions sont alors : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{5}; 7 \right\}$.

III Équations du type $x^2 = a$

Exemples :

1. $x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 6) = 0$.

- Premier cas : $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

- Deuxième cas : $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-6; 6\}$.

2. $x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{7}^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$.

- Premier cas : $x + \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{7}$

- Deuxième cas : $x - \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

Cas général :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc x^2 ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif.
- $x^2 = 0$ a pour solution $x = 0$
- Soit $a > 0$; l'équation s'écrit $x^2 - a = 0$, c'est-à-dire $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ qui se factorise en $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$.
L'équation a donc deux solutions : $\mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.

IV Équation sous forme d'un quotient



Propriété

L'équation $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $B(x) \neq 0$ et $A(x) = 0$

On commence par chercher les valeurs « interdites » qui annulent le dénominateur. L'ensemble de définition (valeurs réelles pour lesquelles l'expression globale est définie) est alors \mathbb{R} , privé de ces valeurs interdites.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $\frac{2x+3}{x-1} = 0$.

Condition d'existence : $x - 1 \neq 0$ donc $x \neq 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation s'écrit : $2x + 3 = 0$ qui donne $x = -\frac{3}{2}$.

$-\frac{3}{2} \neq 1$ donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

(b) Résoudre $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$.

On commence par résoudre l'équation $x + 1 = 0$ qui a pour solution $x = -1$.

L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On suppose maintenant $x \neq -1$.

L'équation s'écrit alors : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0$ qui a pour solutions -1 et 1 .

Or, $x \neq -1$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\mathcal{S} = \{1\}$.